

CORDE AÉRODYNAMIQUE D'UNE AILE

A] DÉFINITIONS

A-1) Corde de référence d'un profil d'aile

Ligne joignant le centre de courbure du bord d'attaque et le bord de fuite du profil.

A-2) Corde

Distance entre l'intersection de la corde de référence et du bord d'attaque du profil et le bord de fuite. Cette définition s'applique à toute surface portante d'un aéronef : aile et stabilisateur bien sûr, mais aussi volets, ailerons, gouverne de direction...

Dans le cas d'une aile, la corde sera déterminée en observant l'aile de dessus, et en mesurant la distance entre bord d'attaque et bord de fuite parallèlement au vecteur vitesse de l'aile par rapport à l'air.



A-3) Corde moyenne standard

Sauf dans le cas très particulier des ailes rectangulaires, la corde variera en fonction de la distance à l'emplanture à laquelle elle est définie.

Afin de faciliter des comparaisons entre ailes de formes différentes, on peut définir la corde moyenne standard (CMS).

C'est la corde d'une aile rectangulaire qui aurait même surface et même envergure que l'aile considérée :

$CMS = \frac{S}{E}$	CMS : corde moyenne standard S : surface de l'aile E : envergure de l'aile
---------------------	--

Cette notion n'est pas d'un très grand intérêt en aérodynamique.

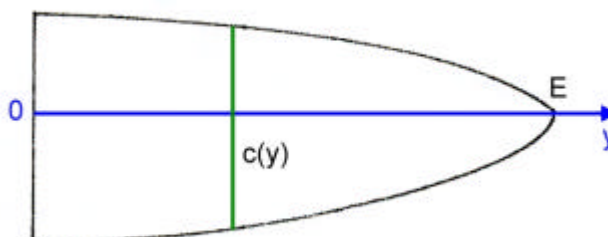
A-4) Corde aérodynamique moyenne

Au contraire de la précédente, cette notion est capitale en aérodynamique pour l'étude de l'équilibre et la stabilité du vol des aéronefs.

A-4-a) Définition

La corde aérodynamique moyenne (CAM) est la corde d'une aile rectangulaire, qui aurait la même surface, qui subirait la même force et dont le centre de poussée serait à la même position que l'aile considérée (pour un angle d'incidence donné).

A-4-b) Formule générale de calcul



Si $c(y)$ est la corde à une distance y de l'emplanture de l'aile, la corde aérodynamique moyenne sera

$$CAM = \frac{1}{S} \int_0^E c^2(y).dy$$

S étant l'aire de l'aile.

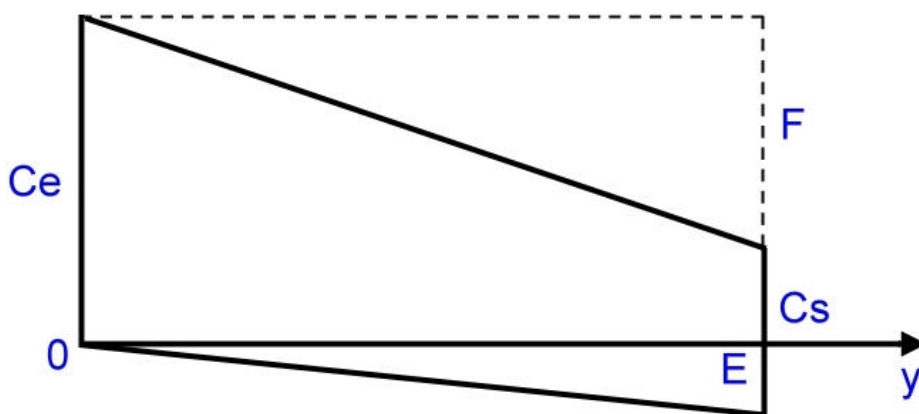
* Il faudra aussi connaître la position de la corde moyenne par rapport à l'emplanture, mais je ne sais pas s'il existe une formule générale pour la calculer.

Remarque : Dans le cas d'une aile rectangulaire, la CAM partage l'aile en deux surfaces égales.

Attention, ce résultat n'est pas général.

B] CALCUL DE LA CORDE AÉRODYNAMIQUE MOYENNE

B-1) AILE TRAPÉZOÏDALE SIMPLE



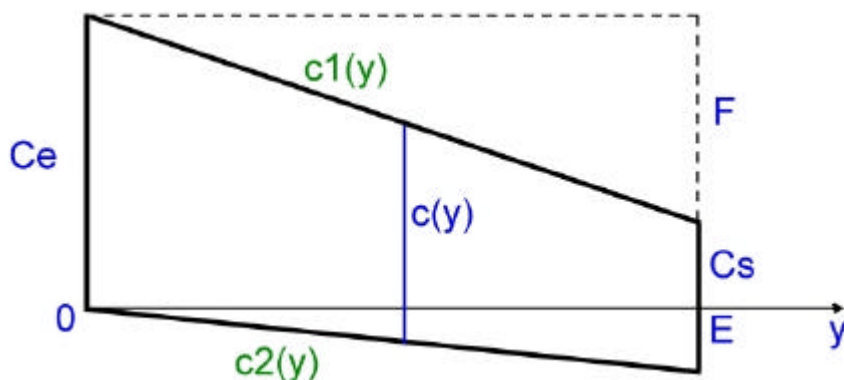
- Ce : corde à l'emplanture
- Cs : corde au saumon
- E : envergure
- F : flèche

B-1-a) Aire de l'aile

$$S = \frac{1}{2} (Ce + Cs).E$$

Rappel : l'aire d'un trapèze est égale à la demi-somme des bases multipliée par la hauteur

B-1-b) Corde moyenne avec la formule de définition



Équation du bord d'attaque : $c1(y) = C_e - \frac{F}{E} \cdot y$

Équation du bord de fuite : $c2(y) = \frac{C_e - F - C_s}{E} \cdot y$

Corde à une abscisse y :

$$c(y) = c1(y) - c2(y) = C_e - \frac{F}{E} y - \frac{C_e - F - C_s}{E} \cdot y = C_e - \left[\frac{C_e - C_s}{E} \right] \cdot y$$

Avec l'effilement $Ef = \frac{C_e}{C_s}$ il vient $c(y) = C_s \cdot \left(Ef - \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] \cdot y \right)$

Il faut calculer l'intégrale $CAM = \frac{1}{S} \int_0^E c^2(y) \cdot dy$

S surface du trapèze $S = \frac{1}{2} (C_e + C_s) \cdot E = \frac{C_s}{2} (Ef + 1) \cdot E$ (voir B-2-a)

$$CAM = \frac{2 \cdot C_s}{(1 + Ef) \cdot E} \int_0^E \left(Ef - \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] \cdot y \right)^2 \cdot dy$$

$$CAM = \frac{2 \cdot C_s}{(1 + Ef) \cdot E} \int_0^E \left(Ef^2 - 2 \cdot Ef \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] \cdot y + \left[\frac{Ef - 1}{E} \right]^2 \cdot y^2 \right) dy$$

$$CAM = \frac{2 \cdot C_s}{(1 + Ef) \cdot E} \left(Ef^2 \cdot [y]_0^E - 2 \cdot Ef \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] \cdot \left[\frac{y}{2} \right]_0^E + \left[\frac{Ef - 1}{E} \right]^2 \cdot \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^E \right)$$

$$CAM = \frac{2 \cdot C_s}{(1 + Ef) \cdot E} \left(Ef^2 \cdot E - 2 \cdot Ef \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] \cdot \frac{E^2}{2} + \left[\frac{Ef - 1}{E} \right]^2 \cdot \frac{E^3}{3} \right)$$

$$CAM = \frac{2 \cdot C_s}{(1 + Ef)} \left(Ef^2 - Ef \cdot (Ef - 1) + (Ef - 1)^2 \cdot \frac{1}{3} \right)$$

$$CAM = \frac{2 \cdot C_s}{3 \cdot (1 + Ef)} \left(3 \cdot Ef^2 - 3 \cdot Ef^2 + 3 \cdot Ef + (Ef^2 - 2 \cdot Ef + 1) \right)$$

$CAM = \frac{2 \cdot C_s}{3} \cdot \frac{(1 + Ef + Ef^2)}{(1 + Ef)}$	<i>(calcul de l'intégrale de définition)</i>
--	--

Ou bien avec les cordes

$CAM = \frac{2}{3} \cdot \frac{(C_e^2 + C_e \cdot C_s + C_s^2)}{(C_e + C_s)}$	<i>(calcul rigoureux)</i>
---	---------------------------

Remarque : on peut noter que la corde aérodynamique moyenne ne dépend pas explicitement de la flèche de l'aile.

* Ensuite pour trouver la position D_{CAM} de la CAM, il suffit d'écrire que pour $y = D_{CAM}$ la corde $c(D_{CAM})$ est égale à la CAM :

$$c(D_{CAM}) = C_s \cdot \left(Ef - \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] \cdot D_{CAM} \right) = CAM = \frac{2 \cdot C_s \cdot (1 + Ef + Ef^2)}{3 \cdot (1 + Ef)}$$

$$Ef - \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] \cdot D_{CAM} = \frac{2 \cdot (1 + Ef + Ef^2)}{3 \cdot (1 + Ef)} \quad \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] \cdot D_{CAM} = Ef - \frac{2 \cdot (1 + Ef + Ef^2)}{3 \cdot (1 + Ef)}$$

$$D_{CAM} = \frac{E}{Ef - 1} \cdot \left(Ef - \frac{2 \cdot (1 + Ef + Ef^2)}{3 \cdot (1 + Ef)} \right) = \frac{E}{Ef - 1} \cdot \left(\frac{3 \cdot Ef \cdot (1 + Ef) - 2 \cdot (1 + Ef + Ef^2)}{3 \cdot (1 + Ef)} \right)$$

$$D_{CAM} = \frac{E}{Ef - 1} \cdot \left(\frac{Ef^2 + Ef - 2}{3 \cdot (1 + Ef)} \right) = \frac{E}{Ef - 1} \cdot \left(\frac{(2 + Ef) \cdot (Ef - 1)}{3 \cdot (1 + Ef)} \right) = \frac{E \cdot (2 + Ef)}{3 \cdot (1 + Ef)}$$

$$D_{CAM} = \frac{E \cdot (2 + Ef)}{3 \cdot (1 + Ef)} \quad \text{ou} \quad D_{CAM} = \frac{E \cdot (C_e + 2 \cdot C_s)}{3 \cdot (C_e + C_s)}$$

(calcul rigoureux)

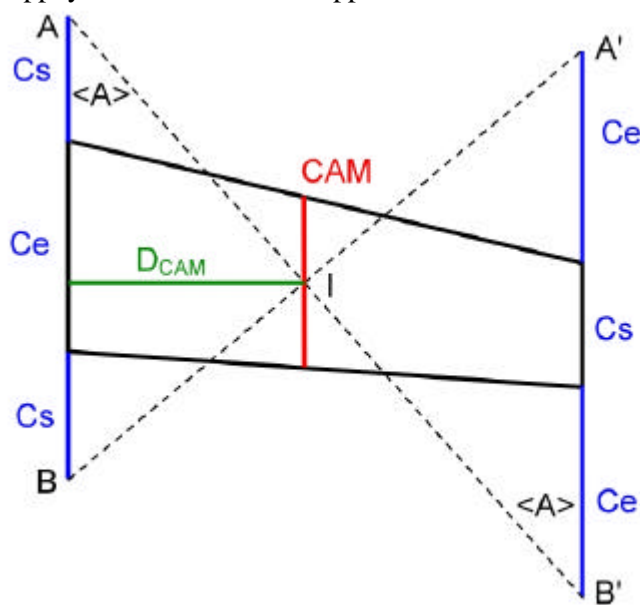
* On pouvait aussi exprimer D_{CAM} sans expliciter la CAM

$$c(D_{CAM}) = CAM = C_e - \left[\frac{C_e - C_s}{E} \right] \cdot D_{CAM} \text{ d'où}$$

$$D_{CAM} = E \cdot \frac{C_e - CAM}{C_e - C_s} \quad \text{(calcul rigoureux)}$$

B-1-c) Corde moyenne par construction géométrique

Calcul géométrique s'appuyant sur la définition approchée A-4-c.



On reporte les cordes C_s et C_e sur les emplanture et saumon comme l'indique la figure. On trace les diagonales (en pointillé sur la figure). Leur intersection I détermine CAM et D_{CAM} .

Les triangles ABI et $A'B'I$ sont semblables $\frac{AI}{IB'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{C_e + 2 \cdot C_s}{C_s + 2 \cdot C_e} = \frac{\frac{C_e}{C_s} + 2}{1 + 2 \cdot \frac{C_e}{C_s}} = \frac{2 + Ef}{1 + 2 \cdot Ef} = k$

Ef étant l'effilement de l'aile $Ef = \frac{C_e}{C_s}$

Par ailleurs $D_{CAM} = AI \cdot \sin \langle A \rangle$ et $E - D_{CAM} = IB' \cdot \sin \langle A \rangle$

$$D'où \quad E - D_{CAM} = IB' \cdot \frac{D_{CAM}}{AI} = \frac{AI}{k} \cdot \frac{D_{CAM}}{AI} = \frac{D_{CAM}}{k}$$

$$\text{Soit aussi} \quad D_{CAM} = \frac{E}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{E}{1 + \frac{1 + 2.Ef}{2 + Ef}} = E \cdot \frac{2 + Ef}{3.(1 + Ef)} \quad D_{CAM} = E \cdot \frac{2 + Ef}{3.(1 + Ef)}$$

* Avec $C(y) = C_s \left(Ef - \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] y \right)$ pour $y = D_{CAM}$, nous calculons CAM

$$CAM = C(D_{CAM}) = C_s \left(Ef - \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] D_{CAM} \right) = C_s \left(Ef - \left[\frac{Ef - 1}{E} \right] E \cdot \frac{2 + Ef}{3.(1 + Ef)} \right)$$

$$CAM = C_s \left(\frac{3.Ef.(1 + Ef) - (Ef - 1).(2 + Ef)}{3.(1 + Ef)} \right) = \frac{C_s}{3.(1 + Ef)} \cdot (3.Ef + 3.Ef^2 + 2 - Ef^2 - Ef)$$

Soit

$$CAM = \frac{2.C_s}{3.(1 + Ef)} \cdot (1 + Ef + Ef^2) \quad D_{CAM} = E \cdot \frac{2 + Ef}{3.(1 + Ef)}$$

(à partir de la construction géométrique)

Ou avec les cordes

$$CAM = \frac{2}{3} \cdot \frac{(C_e^2 + C_e.C_s + C_s^2)}{(C_e + C_s)} \quad \text{et} \quad D_{CAM} = \frac{E}{3} \cdot \frac{C_e + 2.C_s}{(C_e + C_s)}$$

Remarques :

a) Pour la CAM on retrouve le même résultat qu'à partir de l'intégrale de définition : la méthode géométrique donne donc **un résultat rigoureux**.

b) Le site [1] donne les résultats suivants

$$D_{CAM} = E \cdot \frac{(1 + 2.Ef)}{3.(1 + Ef)} \quad CAM = \frac{2.C_s}{3} \cdot \frac{(1 + Ef + Ef^2)}{(1 + Ef)}$$

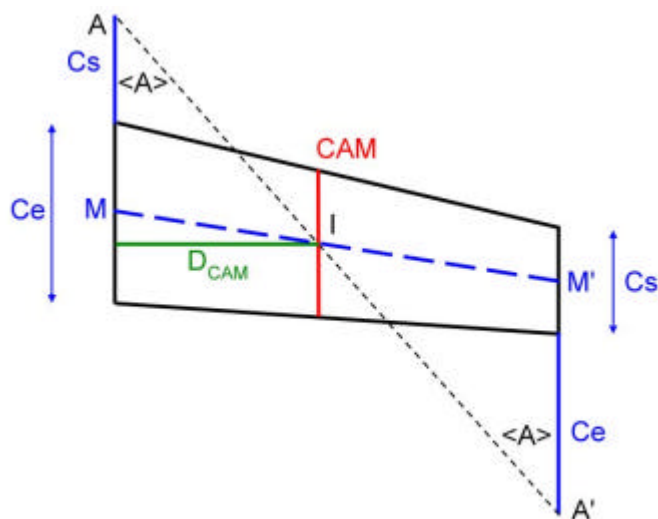
C'est OK pour la CAM, mais pas pour D_{CAM} : **cette formule est erronée** (vraisemblablement coquille dans la page).

c) Ces formules s'appliquent bien sûr à une aile rectangulaire

$$Ef = 1 \quad D_{CAM} = E \cdot \frac{(1 + 2)}{3.(1 + 1)} = \frac{E}{2} \quad CAM = \frac{2.C_s}{3} \cdot \frac{(1 + 1 + 1^2)}{(1 + 1)} = \frac{C_s}{2}$$

d) Il revient strictement au même de faire la construction de la façon suivante :

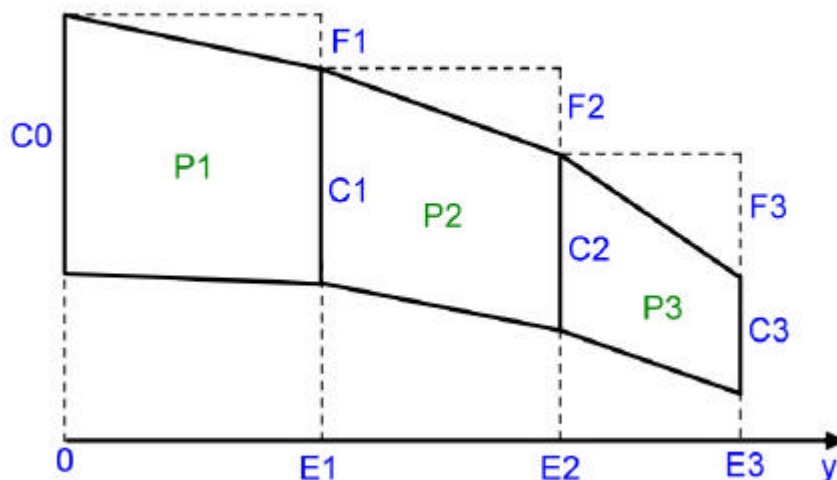
La construction s'appuie sur la « médiane » MM' de l'aile



La démonstration est la même à la seule différence que l'on raisonne sur les triangles semblables AMI et A'M'I.

B-2) AILE TRAPÉZOÏDALE MULTIPLE

On considère maintenant une aile formée de plusieurs panneaux trapézoïdaux, et on veut déterminer sa corde aérodynamique moyenne et la position de cette corde.



B-2-a) Calcul à partir de la formule de définition

$$CAM = \frac{1}{S} \int_0^E c^2(y).dy$$

* Aire de l'aile

C'est la somme des aires des trois panneaux, P1, P2 et P3

$$S1 = \frac{1}{2}(C0 + C1).E1$$

$$S2 = \frac{1}{2}(C1 + C2).E2$$

$$S3 = \frac{1}{2}(C2 + C3).E3$$

D'où
$$S = \frac{1}{2}[(C0 + C1).E1 + (C1 + C2).E2 + (C2 + C3).E3]$$

* Intégrales

Pour le calcul, il faut décomposer l'intégrale en autant d'intégrales qu'il y a de panneaux.

$$CAM = \frac{1}{S} \int_0^E c^2(y).dy = \frac{1}{S} \left[\int_0^{E1} c1^2(y).dy + \int_{E1}^{E2} c2^2(y).dy + \int_{E2}^{E3} c3^2(y).dy \right]$$

* Pour le premier panneau

$$\text{Équation du bord d'attaque : } c11(y) = C0 - \frac{F1}{E1}.y$$

$$\text{Équation du bord de fuite : } c12(y) = \frac{C0 - F1 - C1}{E1}.y$$

Corde à une abscisse y :

$$c1(y) = c11(y) - c12(y) = C0 - \frac{F1}{E1}.y - \frac{C0 - F1 - C1}{E1}.y = C0 - \left[\frac{C0 - C1}{E1} \right].y$$

$$\int_0^{E1} c1^2(y).dy = \int_0^{E1} \left(C0 - \left[\frac{C0 - C1}{E1} \right].y \right)^2 .dy = \left[C0^2.y - C0 \left(\frac{C0 - C1}{E1} \right).y^2 + \left(\frac{C0 - C1}{E1} \right)^2 \cdot \frac{y^3}{3} \right]_0^{E1}$$

$$I_1 = \int_0^{E1} c1^2(y).dy = C0^2.E1 - C0 \left(\frac{C0 - C1}{E1} \right).E1^2 + \left(\frac{C0 - C1}{E1} \right)^2 \cdot \frac{E1^3}{3}$$

$$I_1 = E1 \cdot \left[C0^2 - C0.(C0 - C1) + \frac{1}{3}.(C0 - C1)^2 \right]$$

* Pour le deuxième panneau

On fait un changement d'origine et on prend l'origine en E1

$$\text{Équation du bord d'attaque : } c21(y) = C1 - \frac{F2}{E2}.y$$

$$\text{Équation du bord de fuite : } c22(y) = \frac{C1 - F2 - C2}{E2}.y$$

Corde à une abscisse y :

$$c2(y) = c21(y) - c22(y) = C1 - \frac{F2}{E2}.y - \frac{C1 - F2 - C2}{E2}.y = C1 - \left[\frac{C1 - C2}{E2} \right].y$$

$$\int_0^{E2} c2^2(y).dy = \int_0^{E2} \left(C1 - \left[\frac{C1 - C2}{E2} \right].y \right)^2 .dy = \left[C1^2.y - C1 \left[\frac{C1 - C2}{E2} \right].y^2 + \left[\frac{C1 - C2}{E2} \right]^2 \cdot \frac{y^3}{3} \right]_0^{E2}$$

$$I_2 = C1^2.E2 - C1 \left[\frac{C1 - C2}{E2} \right].E2^2 + \frac{1}{3} \left[\frac{C1 - C2}{E2} \right]^2 .E2^3$$

$$I_2 = E2 \cdot \left[C1^2 - C1.(C1 - C2) + \frac{1}{3}.(C1 - C2)^2 \right]$$

* Enfin pour le troisième panneau, et par analogie, on peut directement écrire

$$c3(y) = C2 - \left[\frac{C2 - C3}{E3} \right].y \quad I_3 = E3 \cdot \left[C2^2 - C2.(C2 - C3) + \frac{1}{3}.(C2 - C3)^2 \right]$$

* CAM

$$CAM = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{S_1 + S_2 + S_3} = 2 \cdot \frac{I_1 + I_2 + I_3}{(C0 + C1).E1 + (C1 + C2).E2 + (C2 + C3).E3}$$

Avec

$$I_1 = E1. \left[C0^2 - C0.(C0 - C1) + \frac{1}{3}.(C0 - C1)^2 \right]$$

$$I_2 = E2. \left[C1^2 - C1.(C1 - C2) + \frac{1}{3}.(C1 - C2)^2 \right]$$

$$I_3 = E3. \left[C2^2 - C2.(C2 - C3) + \frac{1}{3}.(C2 - C3)^2 \right]$$

* D_{CAM}

Pour déterminer la position de la corde moyenne par rapport à l'emplanture, il faut d'abord voir dans quel panneau elle se trouve.

Il suffit pour cela de comparer la CAM aux cordes

Si $C0 > CAM > C1$ la CAM est dans le premier panneau

Si $C1 > CAM > C2$ la CAM est dans le deuxième panneau

Si $C2 > CAM > C3$ la CAM est dans le troisième panneau

Ensuite il faut faire comme dans le cas d'une aile trapézoïdale simple : pour trouver la position D_{CAM} de la CAM, il suffit d'écrire que pour $y = D_{CAM}$ la corde correspondante $c(D_{CAM})$ est égale à la CAM :

$$c(y) = Ce - \left[\frac{Ce - Cs}{E} \right].y \quad c(D_{CAM}) = Ce - \left[\frac{Ce - Cs}{E} \right].D_{CAM} = CAM$$

$$\text{Qui donne } D_{CAM} = E. \frac{Ce - CAM}{Ce - Cs}$$

* Avec l'effilement du panneau on aurait :

$$c(D_{CAM}) = Cs. \left(Ef - \left[\frac{Ef - 1}{E} \right].D_{CAM} \right) = CAM \quad \text{soit} \quad \left[\frac{Ef - 1}{E} \right].D_{CAM} = Ef - \frac{CAM}{Cs}$$

$$D_{CAM} = \frac{E_x}{Ef_x - 1} \left(Ef_x - \frac{CAM}{Cs} \right) \quad \text{ou} \quad D_{CAM} = E_x. \frac{Ce_x - CAM}{Ce_x - Cs_x}$$

X désignant le panneau dans lequel se trouve la CAM.

Remarque

Pour avoir la position de la CAM par rapport à l'emplanture de l'aile il faudra, si la CAM ne se trouve pas dans le premier panneau, ajouter les « envergures » des panneaux précédents.

B-2-b) Principe de la construction géométrique

On commence par déterminer les surfaces et les cordes aérodynamiques moyennes (CAM) pour chaque panneau pris indépendamment.

On calcule une moyenne des CAM pondérée par les surfaces.

Dans le cas d'une aile à trois panneaux trapézoïdaux :

$$CAM = \frac{S_1 * CAM_1 + S_2 * CAM_2 + S_3 * CAM_3}{S_1 + S_2 + S_3}$$

$$D_{CAM} = \frac{S_1 * D_{CAM1} + S_2 * D_{CAM2} + S_3 * D_{CAM3}}{S_1 + S_2 + S_3}$$

Attention : dans ces relations les D_{CAM} sont exprimées par rapport à l'emplanture de l'aile.

Voir le \$C « Calculateurs en ligne » pour la mise en œuvre de cette méthode de calcul.

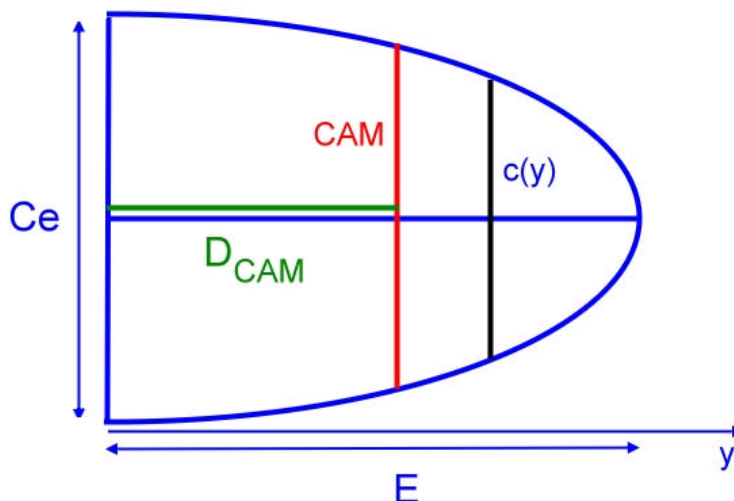
B-3) AILE ELLIPTIQUE

B-3-a) Aire d'une demi-ellipse

Rappel : aire d'une ellipse de demi-axes a et b : $S = \pi.a.b$

a : demi-grand axe de l'ellipse

b : demi-petit axe



Avec les notations de la figure l'aire de l'aile (demi-ellipse) sera $S = \pi \cdot \frac{E \cdot Ce}{4}$

B-3-b) Calcul de la CAM

* Equation cartésienne de l'ellipse $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ soit ici $\frac{x^2}{\left(\frac{Ce}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{E^2} = 1$

d'où $c(y) = 2 \cdot x = Ce \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{E^2}}$

$$CAM = \frac{1}{S} \int_0^E c^2(y) \cdot dy = \frac{4 \cdot Ce}{\pi \cdot E} \int_0^E \left(1 - \frac{y^2}{E^2}\right) dy$$

$$CAM = \frac{4 \cdot Ce}{\pi \cdot E} \cdot \left[y \Big|_0^E - \left[\frac{y^3}{3 \cdot E^2} \right]_0^E \right] = \frac{4 \cdot Ce}{\pi \cdot E} \cdot \left(E - \frac{E^3}{3 \cdot E^2} \right) = \frac{4 \cdot Ce}{\pi \cdot E} \cdot \frac{2 \cdot E}{3}$$

$$CAM = \frac{8 \cdot Ce}{3 \cdot \pi} = 0,848 \cdot Ce$$

La CAM vaut 84,8 % de la corde à l'emplanture dans le cas d'une aile elliptique

* Position de la CAM par rapport à l'emplanture

Elle se calcule simplement à partir de l'équation de l'ellipse : $D_{CAM} = x(CAM/2)$

Avec $\frac{x^2}{\left(\frac{Ce}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{E^2} = 1$ soit $y = E \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{\left(\frac{Ce}{2}\right)^2}}$ d'où $D_{CAM} = E \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{CAM}{2}\right)^2}{\left(\frac{Ce}{2}\right)^2}}$

$$D_{CAM} = E \cdot \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{4 \cdot Ce}{3 \cdot \pi}\right)^2}{\left(\frac{Ce}{2}\right)^2}}$$

$$D_{CAM} = E \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2} = 0,529 \cdot E$$

La CAM est située à 52,9 % de l'envergure de l'aile

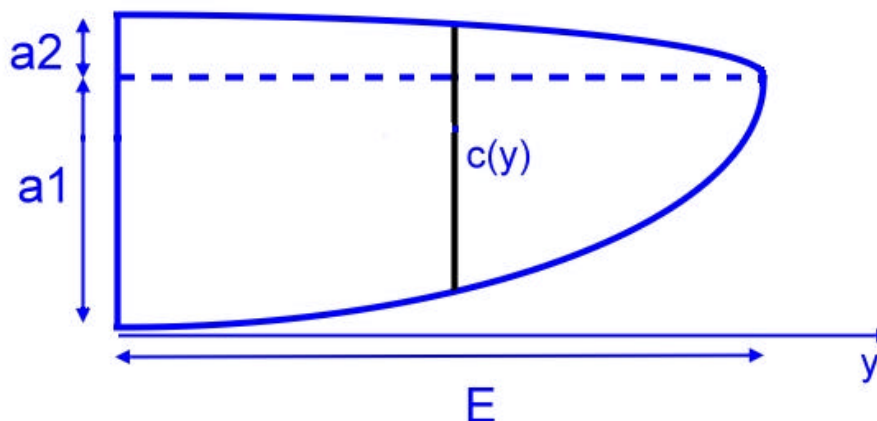
Remarque : ce résultat s'applique aux ailes circulaires, le cercle n'étant qu'une ellipse d'excentricité nulle (les deux demi-axes sont égaux).

B-3-c) Aile à deux portions d'ellipses

On considère maintenant une aile formée de deux portions d'ellipses

- bord d'attaque demi-grand axe E et demi-petit axe a2
- bord de fuite demi-grand axe E et demi-petit axe a1

L'envergure est E, et la corde à l'emplanture $C_e = a_1 + a_2$.



On se propose de déterminer la corde aérodynamique moyenne de cette aile.

* L'aire de l'aile est la somme des quarts des aires de chacune des deux ellipses :

$$S = \pi \cdot \frac{E \cdot a_2}{4} + \pi \cdot \frac{E \cdot a_1}{4} = \frac{\pi \cdot E \cdot (a_1 + a_2)}{4}$$

* Expression de la CAM :

Equations des deux ellipses

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{E^2} = 1 \quad \text{soit} \quad x_1 = a_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{E^2}} \quad \text{et} \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{E^2} = 1 \quad \text{soit} \quad x_2 = a_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{E^2}}$$

La corde pour y donné sera
$$c(y) = x_1 + x_2 = a_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{E^2}} + a_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{E^2}} = (a_1 + a_2) \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{E^2}}$$

$$CAM = \frac{1}{S} \int_0^E c^2(y) \cdot dy = \frac{4 \cdot (a_1 + a_2)}{\pi \cdot E} \int_0^E \left(1 - \frac{y^2}{E^2}\right) \cdot dy \quad \text{soit} \quad CAM = \frac{8 \cdot (a_1 + a_2)}{3 \cdot \pi}$$

$a_1 + a_2 = C_e$ et finalement
$$CAM = \frac{8 \cdot C_e}{3 \cdot \pi}$$

$$CAM = \frac{8 \cdot C_e}{3 \cdot \pi} = 0,848 \cdot C_e$$

La CAM vaut 84,8 % de la corde à l'emplanture

Remarque : on obtient le même résultat que pour une aile en demi-ellipse.

* Position de la CAM

D_{CAM} est la valeur de y pour laquelle la corde $c(y) = CAM$ soit

$$c(D_{CAM}) = Ce \cdot \sqrt{1 - \frac{D_{CAM}^2}{E^2}} = CAM = \frac{8 \cdot Ce}{3 \cdot \pi} \text{ d'où } Ce^2 \cdot \left(1 - \frac{D_{CAM}^2}{E^2}\right) = \left(\frac{8 \cdot Ce}{3 \cdot \pi}\right)^2$$

$$D_{CAM} = E \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{8}{3 \cdot \pi}\right)^2} = 0,529 \cdot E$$

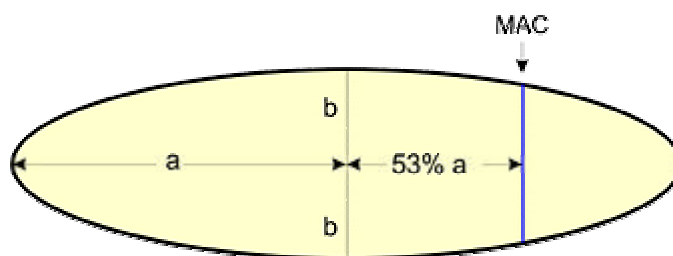
La CAM est située à 52,9 % de l'envergure de l'aile

Remarque : on obtient le même résultat que pour une aile en demi-ellipse.

B-3-d) Résultats du site « Airfield models - formulas »

Voir [5]

La corde aérodynamique moyenne d'une aile elliptique vaut 85% de la corde à l'emplanture et elle est située à 53% de l'envergure de la demi-aile.

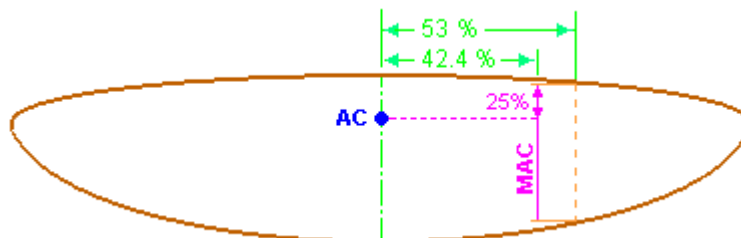


B-3-e) Résultats du site « Welcome to model aircrafts »

[1]

La CAM d'une aile elliptique vaut 85% de la corde à l'emplanture, et est située à 53% de la demi-envergure, à partir de l'emplanture.

Mais à quoi correspond le 42,4% de la figure ci-dessous ?



B-4) MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE GÉNÉRALE

Si l'aile étudiée a une forme trop compliquée pour pouvoir appliquer les résultats précédents, en dernier recours on peut utiliser la méthode géométrique suivante pour déterminer la CAM.

Cette méthode s'applique à n'importe quelle forme d'aile.

Attention : elle ne donne la CAM que de manière approchée.

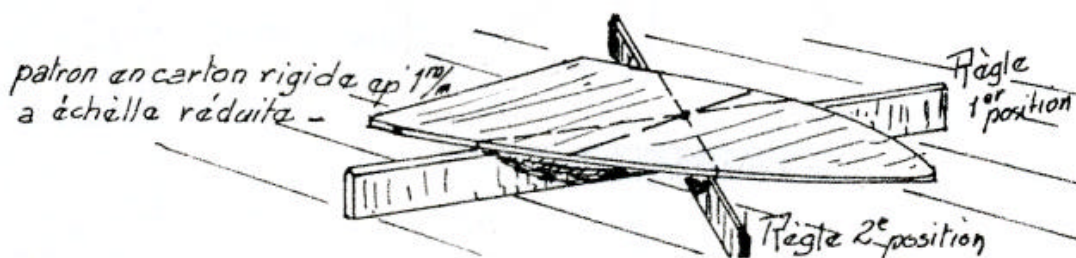
En effet, on détermine le centre de masses (centre de gravité) du modèle d'aile en carton. Ce point n'a de sens aérodynamique que si on fait l'hypothèse que la portance est uniforme sur la surface de l'aile, ce qui est loin d'être le cas en pratique.

Découper dans un carton homogène rigide la forme de l'aile à une échelle donnée.

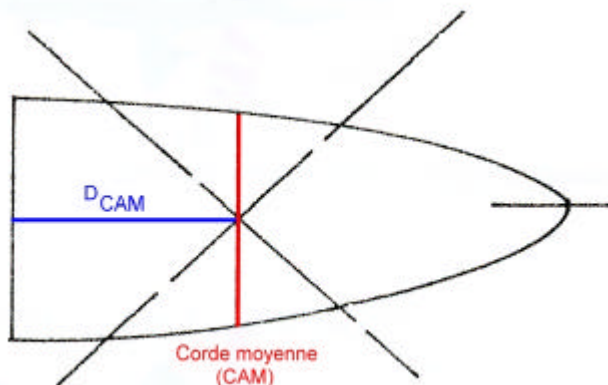
Placer la découpe en équilibre sur une lame étroite (lame de scie à métaux par exemple).

Repérer la position de la règle.

Recommencer pour une ou deux autres orientations de la lame.



L'intersection des lignes tracées est un point de la corde moyenne. Sa connaissance permet de tracer la CAM et de déterminer sa distance à l'emplature :



D_{CAM} : position de la corde aérodynamique moyenne par rapport à l'emplature.

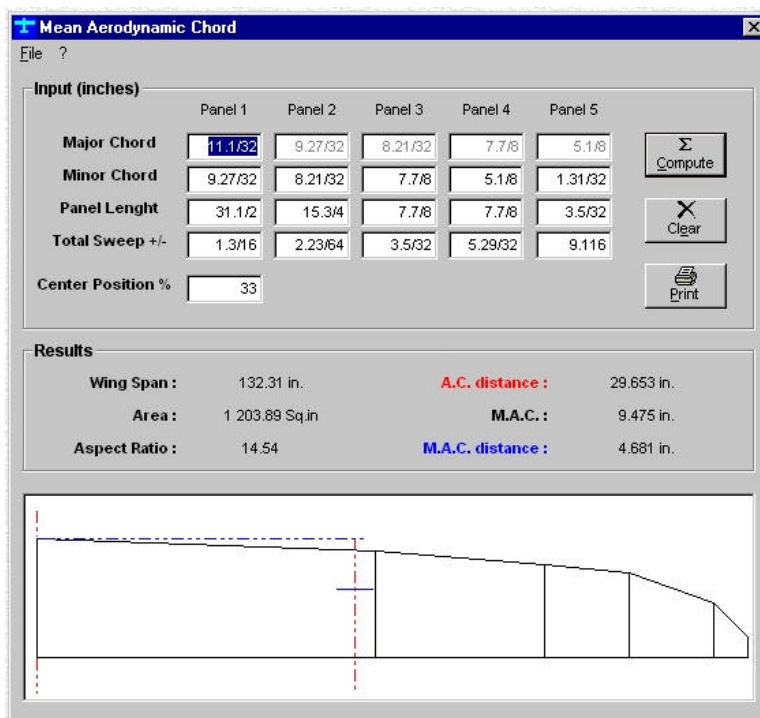
C] CALCULATEURS EN LIGNE

C-1) Logiciel « Corde Moyenne »

Écrit par Jean-Claude Etienne, cette application calcule automatiquement la CAM pour des ailes formés de panneaux trapézoïdaux (jusqu'à 5 panneaux). Très agréable d'utilisation, car il dessine l'aile et visualise la corde moyenne en fonction des données saisies.

La flèche doit être donnée par rapport au bord d'attaque à l'emplature pour tous les panneaux.

Voir [3]



C-2) Site « Palos RC Flying Club »

Voir [3]

The form shown below will calculate the percentage of the Mean Aerodynamic Cord (%MAC) of a model airplane wing for a given position of the CG. If you would like to know the position of the Center of Gravity(CG) as measured from the leading edge of the Root Cord, you should use the form on The Center of Gravity Page.

Calculateur pour une aile trapézoïdale uniquement.

On donne la position souhaitée du CG par rapport au bord d'attaque à l'emplanture et le calculateur donne

- la CAM,
- sa position par rapport à l'emplanture,
- la flèche au niveau de la corde moyenne,
- la position du CG en % de la CAM.

Les formules utilisées pour le calcul sont données. Transcrites avec les notations utilisées dans ce document, cela donne :

$$D_{CAM} = 2.E. \frac{(0,5.Ce + Cs)}{3.(Ce + Cs)} \quad CAM = Ce - \frac{2.(Ce - Cs).(0,5.Ce + Cs)}{3.(Ce + Cs)}$$

$$F_{CAM} = F. \frac{(Ce + 2.Cs)}{3.(Ce + Cs)} \quad CG\%_{CAM} = 100. \frac{(CG - F_{CAM})}{CAM}$$

F_{CAM} = flèche au niveau de la corde moyenne

F = flèche de l'aile

CG %_{CAM} = Position du CG en arrière du bord d'attaque, exprimé en % de la CAM.

Enter Root Cord (A):	<input type="text"/>	
Enter Tip Cord (B):	<input type="text"/>	
Enter Sweep Distance (S):	<input type="text"/>	
Enter Half Span (Y):	<input type="text"/>	
Enter Center of Gravity (CG):	<input type="text"/>	
Click Me to Compute:		
Sweep Distance @ MAC (C) =	<input type="text"/>	
Mean Aerodynamic Cord (MAC) =	<input type="text"/>	
MAC Distance from Root (d) =	<input type="text"/>	
% Mean Aerodynamic Cord (%MAC) =	<input type="text"/>	

The Equations

C	= (S(A+2B)) / (3(A+B))
MAC	= A - (2(A-B)(0.5A+B)) / (3(A+B))
d	= (2Y(0.5A+B)) / (3(A+B))
%MAC B.P.	= ((CG - C) / MAC)*100

C est la flèche au niveau de la corde moyenne : $C = F. \frac{(Ce + 2.Cs)}{3.(Ce + Cs)}$

Remarque :

On peut mettre MAC (CAM) et d (D_{CAM}) sous la forme des \$B-2-b\$ et \$B-2-c\$

$$D_{CAM} = 2.E. \frac{(0,5.Ce + Cs)}{3.(Ce + Cs)} = E. \frac{\frac{Ce}{Cs} + 2}{3.(\frac{Ce}{Cs} + 1)} = E. \frac{2 + Ef}{3.(1 + Ef)}$$

On retrouve bien la même expression de D_{CAM} .

$$CAM = Ce - \frac{2.(Ce - Cs).(0,5.Ce + Cs)}{3.(Ce + Cs)} = Ce - \frac{(Ce - Cs).(Ce + 2.Cs)}{3.(Ce + Cs)} = Ce - \frac{Ce^2 + CeCs - Cs^2}{3.(Ce + Cs)}$$

$$CAM = Ce - \frac{Ce^2 + CeCs - Cs^2}{3.(Ce + Cs)} = \frac{Ce^2 + (Ce + Cs)^2}{3.(Ce + Cs)} = \frac{1}{3} \left[(Ce + Cs) + \frac{Ce^2}{Ce + Cs} \right]$$

On ne retrouve pas la formule $CAM = \frac{2}{3} \left[(Ce + Cs) - \frac{Ce.Cs}{(Ce + Cs)} \right]$

Avec $Ef = \frac{Ce}{Cs}$

$$CAM = Ef.Cs - \frac{(Ef.Cs - Cs).(Ef + 2)}{3.(1 + Ef)} = Cs \left(Ef - \frac{(Ef - 1).(2 + Ef)}{3.(1 + Ef)} \right)$$

$$CAM = Cs \left(\frac{3.Ef.(1 + Ef)}{3.(1 + Ef)} - \frac{(Ef - 1).(2 + Ef)}{3.(1 + Ef)} \right) = \frac{2.Cs}{3.(1 + Ef)} . (1 + Ef + 2.Ef^2)$$

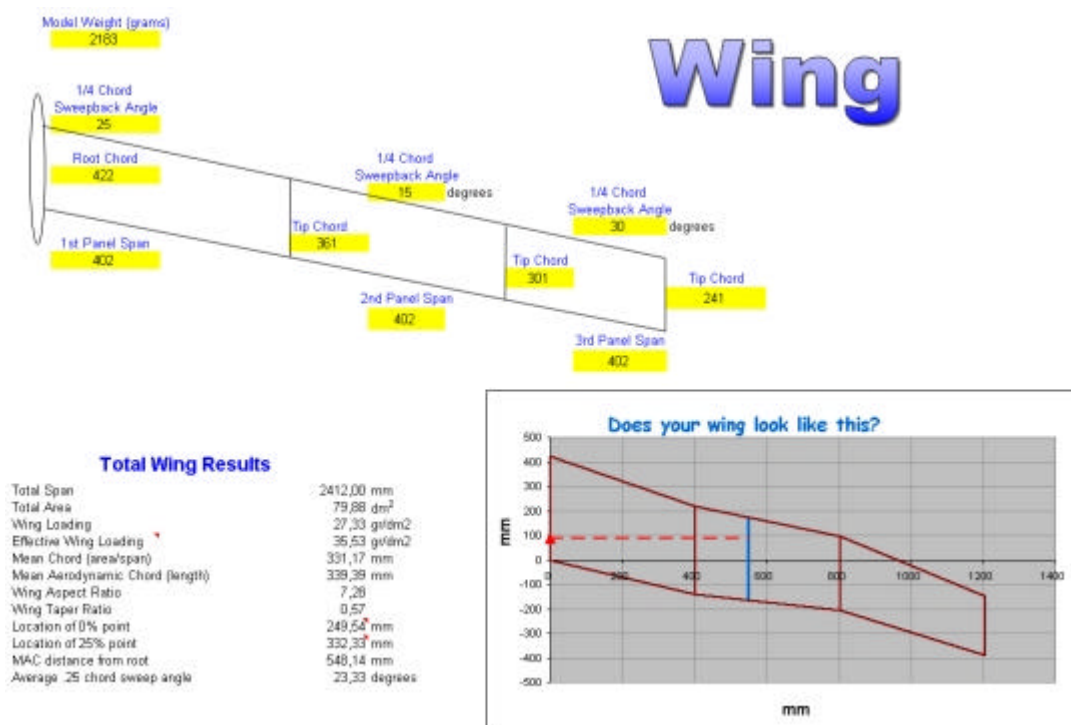
On ne retrouve pas la formule classique : il doit y avoir une erreur dans la formule de MAC donnée.

C-3) Feuille de calcul du site « Tailwind gliders »

Voir [7] Fichier "Flying Wing Calc Metric July 2009.xls"

Calcul pour des ailes trapézoïdales à 3 panneaux maximum. Affiche la forme de l'aile.

Les flèches sont demandées en degrés, ce qui n'est pas toujours le plus commode à l'usage.



Les formules utilisées sont les suivantes :

* CAM de l'aile : $((D62*D64) + (D72*D74) + (D82*D84))/(D62 + D72 + D82)$

$$CAM = \frac{S_1 * CAM_1 + S_2 * CAM_2 + S_3 * CAM_3}{S_1 + S_2 + S_3}$$

* D_{CAM} : $((D62*D67) + (D72*D77) + (D82*D87))/(D62 + D72 + D82)$

$$D_{CAM} = \frac{S_1 * D_{CAM1} + S_2 * D_{CAM2} + S_3 * D_{CAM3}}{S_1 + S_2 + S_3}$$

D62, D72, D82 : aires des 3 panneaux

D64, D74 et D84 : CAM de chaque panneau

D67, D77 et D87 : D_{CAM} de chaque CAM de chaque panneau

* Chaque CAM est calculée par la formule $CAM = \frac{2}{3} \left[Ce + Cs - \frac{CE * Cs}{Ce + Cs} \right]$ qui est bien la

formule de calcul pour un panneau unique :

$$CAM = \frac{2}{3} \cdot \frac{(Ce^2 + Ce.Cs + Cs^2)}{(Ce + Cs)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(Ce^2 + 2.Ce.Cs + Cs^2 - Ce.Cs)}{(Ce + Cs)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(Ce + Cs)^2 - Ce.Cs}{(Ce + Cs)}$$

$$CAM = \frac{2}{3} \cdot \left[(Ce + Cs) - \frac{Ce.Cs}{(Ce + Cs)} \right]$$

* Chaque D_{CAM} est calculée par la formule

$$SI(B11=D15 ; B16/2 ; B16*(B11-D64)/(B11-D15)))$$

B11 : corde « emplanture » du panneau

D15 : corde « saumon » du panneau

B16 : envergure du panneau

D64 : CAM du panneau

D'où la formule

Si $Ce = Cs$

$$\text{Alors } D_{CAM} = E/2$$

$$\text{Sinon } D_{CAM} = E \cdot \frac{Ce - CAM}{Ce - Cs}$$

Si le panneau est un parallélogramme

Alors la corde moyenne est au milieu

Formule établie au §B-4-a

Pour les panneaux autre que le premier, les « envergures » des panneaux précédents sont ajoutées.

D] EXEMPLES NUMÉRIQUES

D-1) Aile trapézoïdale simple

* Valeurs choisies

Corde emplanture 300 mm

Corde saumon 200 mm

Envergure 500 mm

Flèche 200 mm

Centrage 10 %

* Résultats calculs avec formules

$$(1) CAM = \frac{2.Cs}{3.(1 + Ef)} \cdot (1 + Ef + Ef^2) \quad (2) CAM = \frac{2}{3} \cdot \left[(Ce + Cs) - \frac{Ce.Cs}{(Ce + Cs)} \right]$$

$$(1) D_{CAM} = E \cdot \frac{2 + Ef}{3.(1 + Ef)} \quad (2) D_{CAM} = \frac{E}{3} \cdot \frac{Ce + 2.Cs}{(Ce + Cs)} \quad (3) D_{CAM} = E \cdot \frac{Ce - CAM}{Ce - Cs}$$

$Ef = Ce/Cs$ 1,5

Surface 25 25 dm²

D_{CAM} (1) 233,33 mm

D_{CAM} (2) 233,33 mm

D_{CAM} (3) 233,35 mm

CAM (1) 253,33 mm

CAM (2) 253,33 mm OK

* Résultats « CM-Corde Moyenne »

D_{CAM} 233,33 mm
 CAM 253,33 mm
 Envergure totale 1000 mm
 Surface 25 dm²
 Distance centrage 118,67 mm

* Résultats « Palos »

D_{CAM} 233,33 mm
 CAM 253,33 mm
 Flèche @ CAM 93,33 mm

* Résultats « Tailwing glider »

Idem

OK : Tous les calculs concordent.

D-2) Aile en 3 panneaux trapézoïdaux

* Valeurs choisies

C0 (mm)	C1 (mm)	E1 (mm)	F1 (mm)	A1 (°)	C2 (mm)	E2 (mm)	F2 (mm)	A2 (°)	C3 (mm)	E3 (mm)	F3 (mm)	A3 (°)
200	150	400	40	5,71	100	300	100	11,30	80	200	150	14,03

F_x : flèche du panneau x mesurée depuis le bord d'attaque de l'emplanture

A_x : flèche angulaire (en degrés) du panneau x .

Centrage 10 %

* Résultats des calculs avec les formules

- Calculs pour les panneaux pris séparément

$$E_f = \frac{C_e}{C_s} \quad S = \frac{1}{2} [(C_e + C_s) \cdot E]$$

$$CAM = \frac{2 \cdot C_s}{3 \cdot (1 + E_f)} \cdot (1 + E_f + E_f^2) \quad D_{CAM} = E \cdot \frac{2 + E_f}{3 \cdot (1 + E_f)}$$

$$D_{CAM} = E \cdot \frac{C_e - CAM}{C_e - C_s} \quad (2)$$

	Panneau 1	Panneau 2	Panneau 3
Surface (dm ²)	7,00	3,75	1,80
E_f	1,333	1,50	1,25
D_{CAM} (mm)	190,48	140,00	96,29
D_{CAM} (2) (mm)	190,72	140,04	96,30
CAM (mm)	176,16	126,66	90,37

Les D_{CAM} sont donnée par rapport à « l'emplanture » de chaque panneau et non par rapport à l'emplanture de l'aile.

- Envergure $E1 + E2 + E3 = 900$ mm

- Surface $S = S_1 + S_2 + S_3 = 7,00 + 3,75 + 1,80 = 12,55$ dm²

- CAM

$$I_1 = E1 \cdot \left[C0^2 - C0 \cdot (C0 - C1) + \frac{1}{3} \cdot (C0 - C1)^2 \right]$$

$$I_2 = E2 \cdot \left[C1^2 - C1 \cdot (C1 - C2) + \frac{1}{3} \cdot (C1 - C2)^2 \right]$$

$$I_3 = E3 \left[C2^2 - C2 \cdot (C2 - C3) + \frac{1}{3} \cdot (C2 - C3)^2 \right]$$

$$I_1 = 12333333,33 \text{ mm}^3 = 12,333 \text{ dm}^3$$

$$I_2 = 4750000,0 \text{ mm}^3 = 4,750 \text{ dm}^3$$

$$I_3 = 1626666,66 \text{ mm}^3 = 1,626 \text{ dm}^3$$

$$\text{CAM} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{S} = 1,49075 \text{ dm} = 149,07 \text{ mm}$$

$$- D_{\text{CAM}}$$

Attention dans cette formule ce sont les D_{CAM} par rapport à l'emplanture de l'aile qui interviennent

$$D_{\text{CAM}} = \frac{S_1 * D_{\text{CAM}1} + S_2 * D_{\text{CAM}2} + S_3 * D_{\text{CAM}3}}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{7,0 * 190,48 + 3,75 * (400 + 140) + 1,80 * (400 + 300 + 96,29)}{12,55} = 381,80 \text{ mm}$$

* Résultats donnés par le programme « CM - Corde Moyenne »

D_{CAM}	381,81 mm
CAM	149,08 mm
Envergure totale	1800 mm
Surface	29,10 dm ²
Distance centrage	63,65 mm

* Résultats donnés par la feuille de calcul « Tailwing glider »

D_{CAM}	381,81 mm
CAM	149,08 mm

$S_1 = 7,00 \text{ dm}^2$	$S_2 = 3,75 \text{ dm}^2$	$S_3 = 1,80 \text{ dm}^2$
$\text{CAM}_1 = 176,19 \text{ mm}$	$\text{CAM}_2 = 126,67 \text{ mm}$	$\text{CAM}_3 = 90,37 \text{ mm}$
$D_{\text{CAM}1} = 190,48 \text{ mm}$	$D_{\text{CAM}2} = 540,00 \text{ mm}$	$D_{\text{CAM}3} = 796,30 \text{ mm}$

Vérification des formules utilisées dans cette feuille

$$\text{CAM} = \frac{S_1 * \text{CAM}_1 + S_2 * \text{CAM}_2 + S_3 * \text{CAM}_3}{S_1 + S_2 + S_3} \quad \text{CAM} = 149,08 \text{ mm}$$

$$D_{\text{CAM}} = \frac{S_1 * D_{\text{CAM}1} + S_2 * D_{\text{CAM}2} + S_3 * D_{\text{CAM}3}}{S_1 + S_2 + S_3} \quad D_{\text{CAM}} = 381,80 \text{ mm}$$

Les deux calculateurs donnent bien les mêmes résultats.

RÉFÉRENCES

[1] Welcome to Model Aircrafts

Site <http://adamone.rchomepage.com/index.html>

[2] Ron van Putte on canards

Model Aviation , juin 1980

Putte.pdf

[3] CM – Corde moyenne

Logiciel de Jean-Claude Etienne

<http://fly.to/tracfoil/>

<http://pagesperso-orange.fr/scherrer/matthieu/english/mce.html>

Calcule la corde moyenne pour des ailes formées de portions trapézoïdales. Dessine l'aile dont les dimensions ont été saisies.

[4] Chord (aircraft)

Page Wikipedia

[http://en.wikipedia.org/wiki/Chord_\(aircraft\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Chord_(aircraft))

[5] Palos RC flying club

<http://www.palosrc.com/instructors/mac.htm>

Calculateur en ligne pour une aile trapézoïdale. Les formules sont données. On donne une position du CG et les grandeurs sont calculées.

[6] Airfiels Models

http://www.airfieldmodels.com/information_source/math_and_science_of_model_aircraft/formulas/mean_aerodynamic_chord.htm

Définitions. Calcul pour trapèze et ellipse.

[7] Flying wing calc site Tailwind gliders

<http://www.tailwindgliders.com/Files.html#Articles>

Feuille de calcul de la corde, du foyer...

Scale Road Show : Calculateur NASA en ligne

<http://www.nasascale.org/howtos/mac-calculator.htm>

Calculateur en ligne pour une aile trapézoïdale, copie de [5].

Site Aircraft proving grounds

http://www.geistware.com/rcmodeling/cg_calc.htm

Un autre calculateur en ligne de CAM.