

Notion de Foyer aérodynamique Définition - calculs



Girouette de LAPRESLE

Le centrage d'un aéronef est conditionné par la détermination de la position d'un point particulier appelé « foyer aérodynamique ». Dans ce document nous nous proposons de définir ce foyer (ou plutôt ces foyers) et de présenter des méthodes de détermination de sa position.

Dans ce document les grandeurs vectorielles sont écrites en gras : exemple portance **Ra**.

Les définitions seront en bleu : **Cp centre de poussée**

Les hypothèses seront écrites en violet. Ex : Cas d'un profil mince

SOMMAIRE

GIROUETTE

- Expérience préliminaire
- Foyer de la girouette
- Propriétés du foyer

FOYERS D'UN AERONEF

- Foyer relatif à l'axe de lacet
- Foyer relatif à l'axe de tangage
- Foyer relatif à l'axe de roulis

FOYER D'UNE AILE

- Résultat expérimental
- Cas d'une aile rectangulaire
- Cas d'une aile de géométrie « quelconque »
- Calcul de la corde aérodynamique moyenne
- Détermination expérimentale de la CAM et du foyer

ACTIONS AERODYNAMIQUES SUBIES PAR UNE AILE

- Modélisation des actions aérodynamiques
- Expressions de la portance et du moment de tangage
- Coefficient de portance
 - Exemple de profil
 - Généralisation
 - Influence de l'allongement
- Coefficient de moment
 - Exemple de profil
 - Généralisation
- Catalogues de profils

FOYERS D'UN AERONEF FICTIF A DEUX PLANS

- Types d'aéronefs
- Formule tenant compte des allongements des plans
- Première application : RRG Ente
- Détermination graphique
- Prise en compte de la déflexion de l'air par le plan avant
 - Notion de déflexion
 - Formules
 - Comparaison des formules
 - Calcul du foyer global en tenant compte de la déflexion
 - Application numérique comparative

FOYERS D'UN AERONEF COMPLET

- Foyer, coefficient de portance
- Calcul de la position du foyer global

FOYER D'UN AERONEF A TROIS PLANS

- Calcul du foyer global
- Comparaison avec la « formule de Luc »

ANNEXE 1 : Moment d'une force par rapport à un point

ANNEXE 2 : Corde aérodynamique moyenne

ANNEXE 3 : Quelques formules empiriques de calcul du foyer global

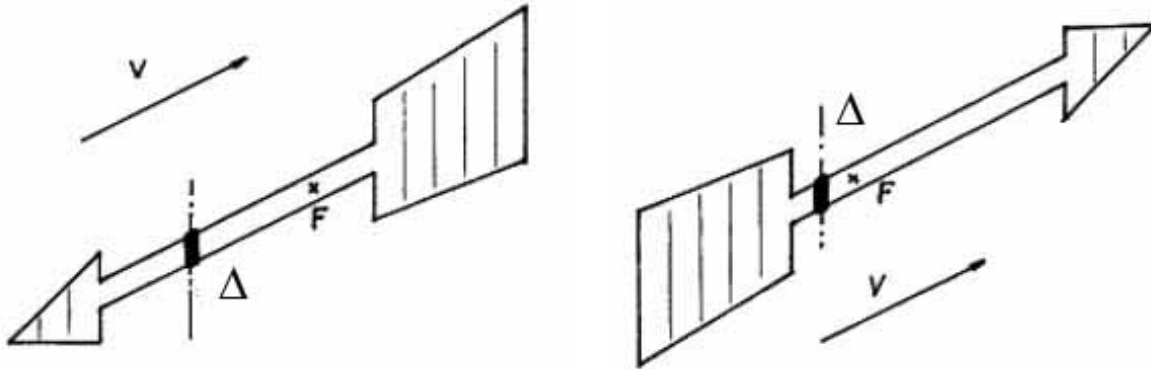
GIROUETTE

EXPERIENCE PRELIMINAIRE

Portance_empennage_soufflerie.ppt

[Rousselot]

On déplace l'axe de rotation Δ et on observe les mouvements de la girouette. Si l'axe de rotation est vers la pointe, la girouette s'oriente dans le lit du vent. Si l'axe de rotation est plutôt du côté de l'empennage la girouette pivote de 180° et s'oriente encore dans le lit du vent mais la pointe en arrière.

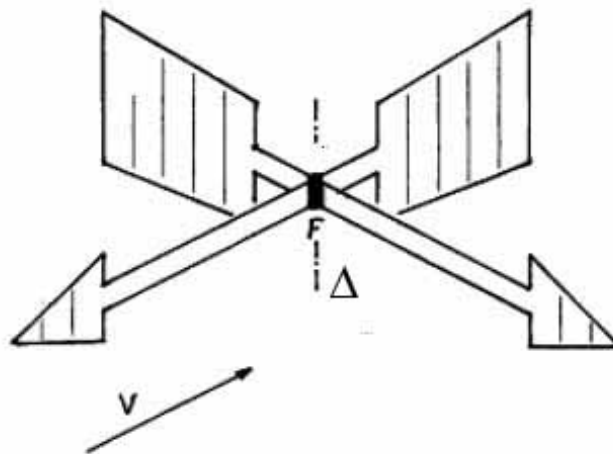


Girouette en position « normale »

Girouette en position « inversée »

Pour ces deux positions, si on déplace la girouette elle revient spontanément dans sa position initiale avec plus ou moins d'oscillations.

Par tâtonnements, en déplaçant l'axe de rotation Δ , on trouve une position pour laquelle la girouette ne s'oriente plus dans la direction du vent et n'a plus de position définie : si on la déplace elle reste dans la position dans laquelle on l'a placée.



FOYER DE LA GIROUETTE

Dans ce dernier cas on dit que l'axe de rotation est au **FOYER** de la girouette.

PROPRIETES DU FOYER

[Rousselot]

Le foyer a des propriétés bien particulières.

Supposons que l'axe de la girouette passe par son foyer. La girouette est dans une position indéterminée. Si nous la faisons tourner d'un certain angle, elle reste dans la nouvelle position qu'on lui a donnée.

Soit nous appelons $d\mathbf{F}$ la variation de la force aérodynamique subie par la girouette lorsqu'on l'a déplacée.

On conclue que le moment de $d\mathbf{F}$ par rapport au foyer est **nul**, (puisque la girouette reste dans la nouvelle position) ou en d'autres termes que $d\mathbf{F}$ s'applique au foyer F.

On conclue également (pour la même raison) que la variation du moment des forces aérodynamiques par rapport au foyer est nulle lorsque α varie (α angle que fait la girouette par rapport au lit du vent), ou en d'autres termes que le moment de l'ensemble des forces aérodynamiques est indépendant de α .

En résumé, il faut retenir les deux résultats fondamentaux suivants, qui seront à la base de la compréhension de l'équilibre et de la stabilité d'un aéronef en vol, comme on le verra ultérieurement :

- La **variation** de la force aérodynamique pour une variation de la position de la girouette s'applique au foyer.
- La **variation** du moment des forces aérodynamiques par rapport au foyer est nulle.

EQUILIBRE ET STABILITE DE LA GIROUETTE

L'expérience précédente nous montre que pour que la girouette nous indique correctement la direction du vent il faut que l'**axe Δ soit placé en avant du foyer**.

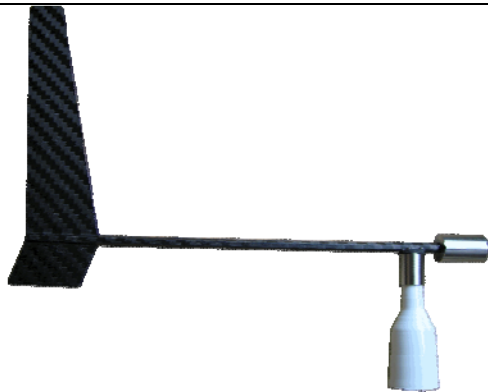
Dans ces conditions :

La girouette sera équilibrée lorsque sa pointe sera dans la direction du vent.

Cette position d'équilibre sera stable : déplacée de sa position d'équilibre, la girouette va spontanément reprendre sa position d'équilibre, éventuellement avec quelques oscillations qui s'amortiront plus ou moins rapidement. La stabilité est d'autant plus grande que l'axe est plus éloigné (en avant) du foyer.

On retiendra que

Pour que la girouette soit en **équilibre stable** lorsqu'elle est dans la direction du vent, il faut que l'**axe Δ soit placé en avant du foyer**.



*Cette girouette prendra une position d'équilibre très stable dans la direction du vent.
Son axe de rotation placé en son centre de gravité est très en avant du foyer aérodynamique*

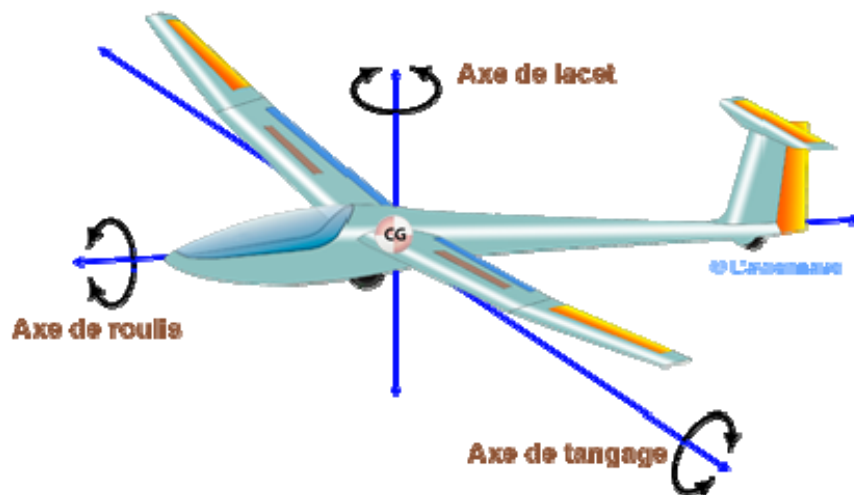
FOYERS D'UN AÉRONEF

[[chargement-et-centrage-du-planeur.pdf](#)]

Cette notion de foyer peut être appliquée à tout corps susceptible de tourner autour d'un axe, et placé dans un flux d'air. Donc à un avion ou un planeur. C'est autour du centre de gravité de l'aéronef que se feront les mouvements, et la différence avec la girouette est que dans ce cas on peut définir divers axes autour desquels l'appareil peut tourner.

Traditionnellement on définit les 3 axes suivants :

- axe de lacet
- axe de tangage
- axe de roulis



Il sera alors possible de mettre en évidence un foyer aérodynamique relatif à chacun de ces axes. Le plus important pour l'étude de l'équilibre et de la stabilité de l'aéronef en vol sera le foyer relatif à l'axe de tangage.

* FOYER RELATIF A L'AXE DE LACET

[Lapresle 1930] [Chabonat]

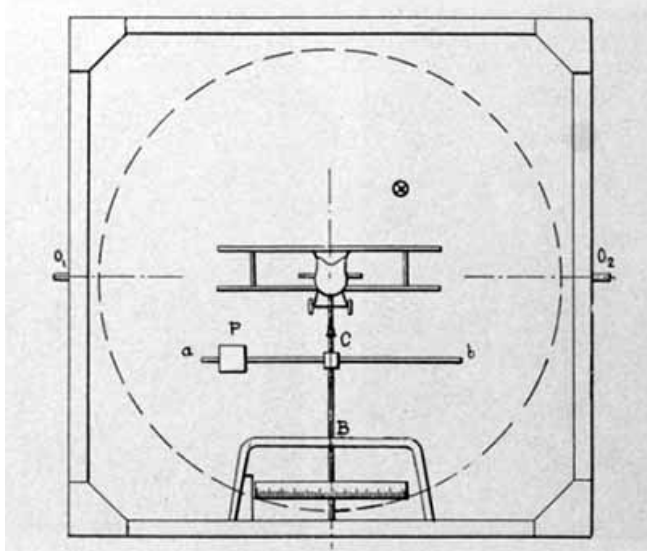
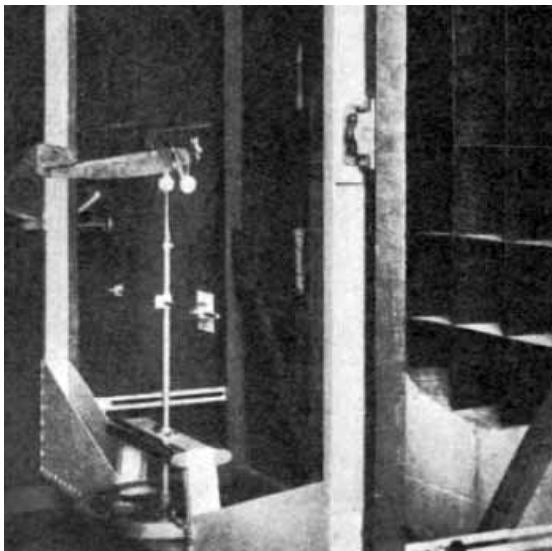
Dans les années 1920-1930, Antonin LAPRESLE, collaborateur de Gustave EIFFEL, puis directeur du laboratoire d'aérodynamique Eiffel, a étudié expérimentalement le comportement de modèles dans la soufflerie du laboratoire.



Antonin LAPRESLE (debout), alors collaborateur de Gustave EIFFEL (assis)

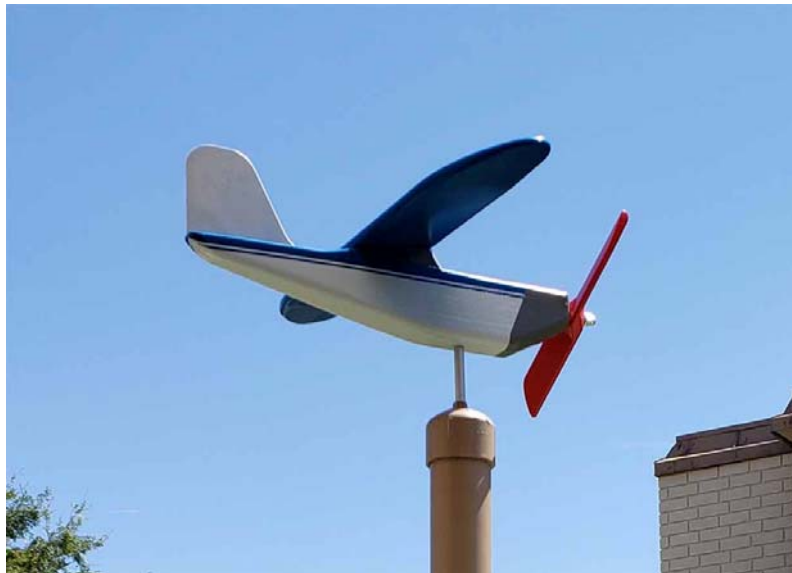
Le principe est celui même de la girouette : un modèle, fixé sur un axe vertical et susceptible de tourner librement autour de cet axe, est placé dans la veine d'air d'une soufflerie. En déplaçant l'axe de rotation par rapport au modèle on observe le même comportement de ce dernier que pour la girouette.

Des dispositifs adéquats permettent de mesurer les actions aérodynamiques subies par le modèle (forces, couple).



On définit ainsi le **FOYER de l'avion relatif à son axe de lacet**, axe autour duquel l'équilibre du modèle dans la veine d'air est indifférent.

AVION = GIROUETTE



Il n'est pas rare de voir de telles girouettes près de maisons.

DETERMINATION GRAPHIQUE

[Harivel MRA 588]

« Découper à une échelle quelconque le profil du fuselage dans un carton rigide.

Mettre cette découpe en équilibre sur une règle dans une première position quelconque et tracer sur le carton cette première position d'équilibre.

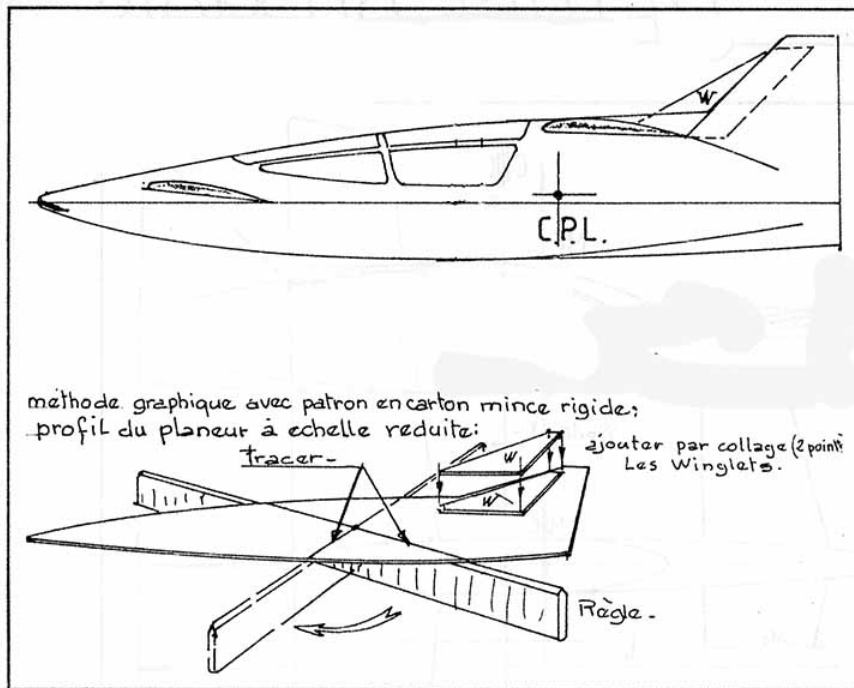
Refaire le même équilibre pour une autre position de la règle et tracer cette deuxième position d'équilibre.

L'intersection I des deux droites donne la position du foyer relatif à l'axe de lacet.

(On peut tracer autant de positions d'équilibre que l'on veut : elles se coupent toutes au même point).

Remarque

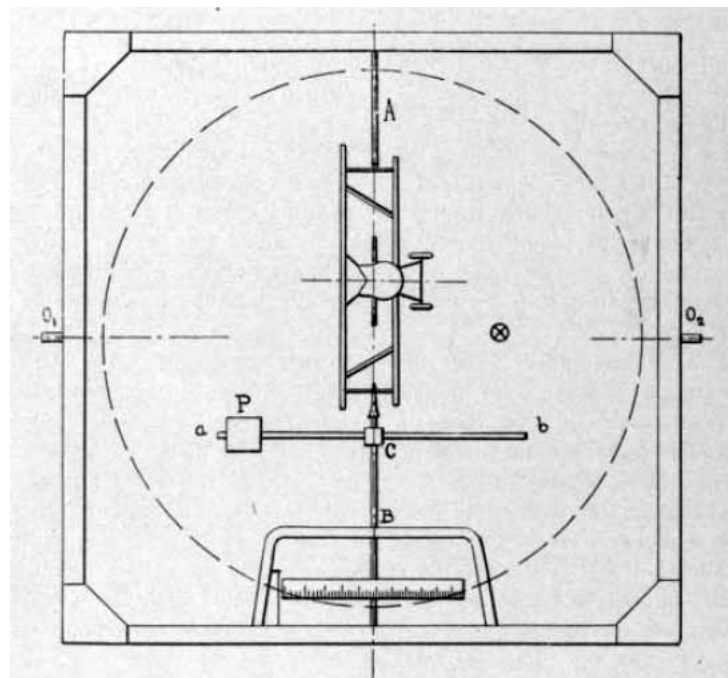
Si le modèle a des dérives en bout d'aile il faudra en tenir compte et coller leur silhouette au bon emplacement comme le montre le dessin. »



Détermination du centre de poussée latérale

* FOYER RELATIF A L'AXE DE TANGAGE

On peut réaliser la même expérience avec un modèle disposé verticalement sur un axe vertical. La photo ci-dessous montre un modèle fixé sur une « girouette de Lapresle » qui, placé dans une soufflerie, permet l'étude expérimentale de l'équilibre et de la stabilité longitudinale.



Etude en soufflerie du comportement d'un modèle sur son axe de tangage.

Encore une fois, mêmes conclusions que pour la girouette.

On définit ici le **FOYER de l'avion relatif à son axe de tangage**.

C'est le foyer relatif à l'axe de tangage qui joue le rôle fondamental dans l'équilibre et la stabilité longitudinaux d'un aéronef.

* FOYER RELATIF A L'AXE DE ROULIS

Remarque

On pourrait de la même manière définir un foyer relatif à l'axe de roulis. Comme nous nous intéressons avant tout à l'axe de tangage nous ne parlerons pas de l'axe de roulis [voir Lapresle pour plus de détails].

* CAS D'UN PLANEUR EN VOL

En vol, c'est autour de son centre de gravité (CG) que le planeur va se comporter comme une girouette. La position de ce CG conditionne donc le comportement en vol du planeur, et on a déjà un premier résultat fondamental :

Pour que le vol du planeur soit **stable** autour de son centre de gravité, il faudra impérativement que ce **centre de gravité soit placé en avant des foyers**.

Que signifie « vol stable » ? Supposons l'appareil en vol rectiligne horizontal. Si pour une raison quelconque son assiette est modifiée sur l'un ou plusieurs de ses axes (par exemple sous l'effet d'une rafale de vent), on dira qu'il est stable s'il a spontanément tendance à reprendre son assiette et sa direction initiales.

FOYER D'UNE AILE

Les foyers aérodynamiques d'un aéronef ayant été mis en évidence expérimentalement, sera-t-il possible de déterminer leur position autrement que par l'expérience ? La réponse est oui... mais...

La méthode consistera à décomposer le planeur en 3 éléments :

Les aile

Le stabilisateur

Le fuselage

Puis à chercher à déterminer le foyer de chacun de ces éléments pris séparément.

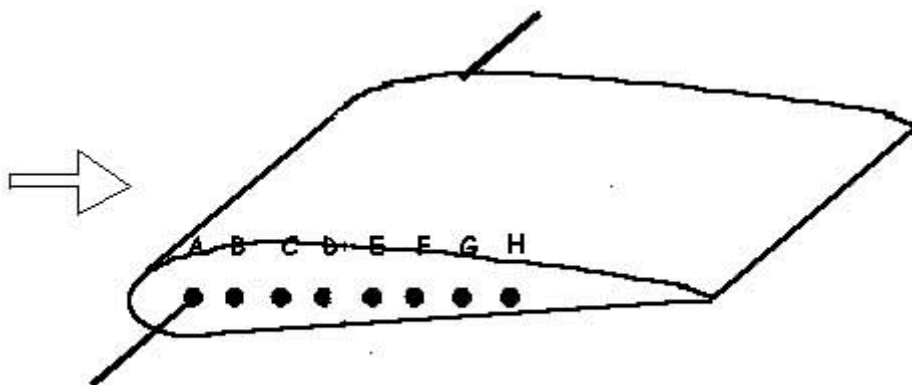
Et enfin à déduire le foyer de l'ensemble (que l'on appellera **foyer global**).

Remarque

Le cas échéant, on pourra traiter les appareils à 3 plans porteurs (aile, stabilisateur horizontal et plan canard) de la même façon.

RESULTAT EXPERIMENTAL

On peut répéter l'expérience de la girouette avec un tronçon d'aile rectangulaire et mettre en évidence de la même manière l'existence du foyer.



L'étude expérimentale de nombreux profils très divers conduit à un résultat a priori surprenant :

Pour un profil d'épaisseur relative pas trop grande (typiquement $< 10\%$) et une cambrure également pas trop grande ($< 5\%$) le foyer se trouve à **peu près** à 25% de la corde en arrière du BA.

Il est surprenant que la position du foyer soit indépendante du profil de l'aile. En y regardant de plus près on peut toutefois constater que la position du foyer dépend un peu du profil et qu'elle se situe **entre 23 et 28 % de la corde**.

Et en pratique ?

Tous les calculs, même ceux s'appuyant sur les résultats de mécanique des fluides les plus élaborés, sont entachés d'incertitudes de l'ordre de quelques %. Il serait donc tout à fait illusoire de vouloir calculer la position du foyer à une précision supérieure.

CAS D'UNE AILE RECTANGULAIRE

Dans le cadre des hypothèses ci-dessus on admettra que :

Le foyer d'une aile rectangulaire est un point fixe situé à 25 % de sa corde.

CAS D'UNE AILE DE GEOMETRIE « QUELCONQUE »

Dans le cas d'une aile non rectangulaire, la corde varie le long de l'envergure. On définit alors la Corde aérodynamique moyenne (CAM) de l'aile.

- Définition

La **corde aérodynamique moyenne (CAM)** est la corde d'une aile rectangulaire, qui aurait la même surface, qui subirait la même force et dont le centre de poussée serait à la même position que l'aile considérée (pour un angle d'incidence donné).

Cette notion est d'un grand intérêt car elle permet de remplacer l'aile réelle par une aile rectangulaire dans tous les calculs que l'on peut être amené à faire ultérieurement.

L'aile « équivalente » étant rectangulaire :

Le foyer d'une aile de forme quelconque sera un point fixe situé à 25 % de sa CAM (corde aérodynamique moyenne).

DETERMINATION EXPERIMENTALE DU FOYER D'UNE AILE

[Harivel, MRA n° 588, 1988-11]

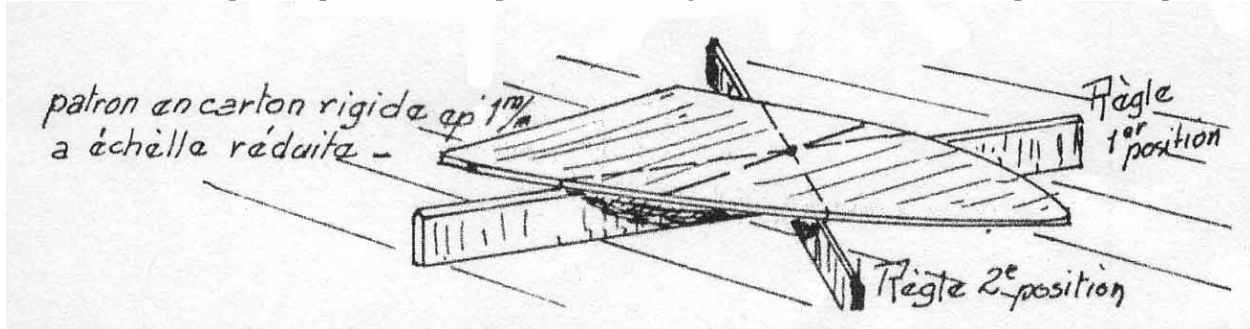
Cette méthode bien adaptée aux moyens des modélistes a été proposée par Pierre Harivel dans *Le MRA* de novembre 1988.

Cette méthode ne s'applique que dans le cas d'ailes dont le profil est le même sur toute l'envergure.

Découper à une échelle quelconque la forme de l'aile dans un carton rigide.

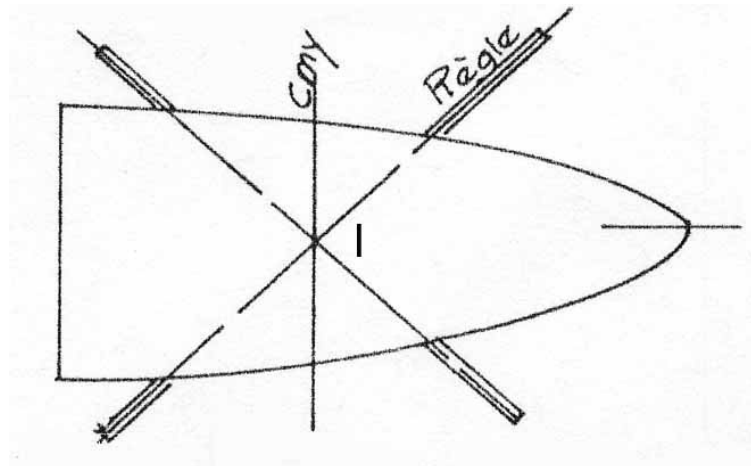
Mettre cette découpe en équilibre sur une règle dans une première position quelconque et tracer sur le carton cette première position d'équilibre.

Refaire le même équilibre pour une autre position de la règle et tracer cette deuxième position d'équilibre.

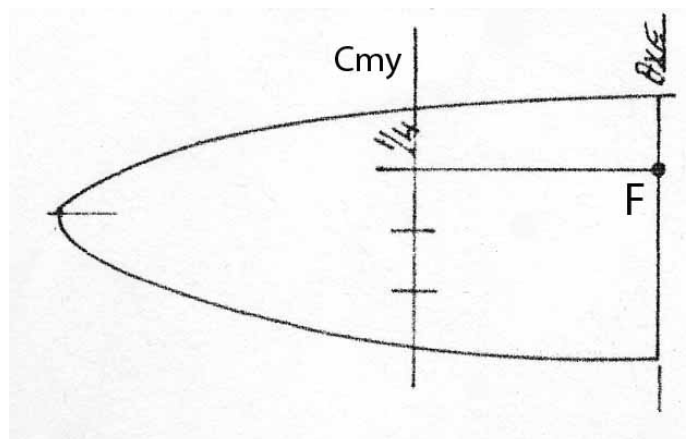


L'intersection I des deux droites donne la position de la corde aérodynamique moyenne.

(On peut tracer autant de positions d'équilibre que l'on veut : elles se coupent toutes au même point.)



La projection sur point qui est au quart de la corde moyenne sur l'emplanture de l'aile donne la position du foyer F.



RESULTANTE DES ACTIONS AERODYNAMIQUES SUBIES PAR UNE AILE

MODELISATION DES ACTIONS AERODYNAMIQUES

Pour aller plus loin dans le calcul de la position du foyer global d'un planeur, il est maintenant nécessaire de modéliser les actions aérodynamiques subies par une aile.

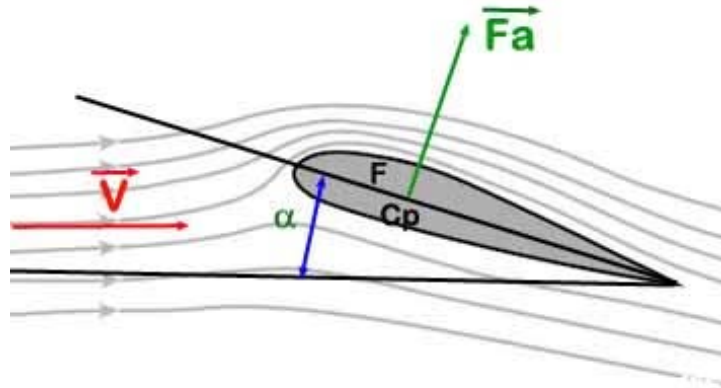


Considérons une aile placée dans une soufflerie, fixée sur un axe horizontal Δ passant par son centre de gravité C_g et mobile autour de cet axe. Le flux d'air est horizontal. A l'aide de dispositifs de mesure adaptés (balance aérodynamique) on peut mesurer les différentes composantes des actions (forces et moment) s'exerçant sur l'aile.

α : angle d'incidence (angle entre la direction du flux d'air et la corde du profil de l'aile)

\mathbf{F}_a : (c'est un vecteur) résultante des forces pressantes s'exerçant sur toute la surface de l'aile (intrados + extrados).

On appelle « Centre de poussée » C_p le point d'application de \mathbf{F}_a .



L'expérience montre que, pour la majorité des profils (mais pas tous) :

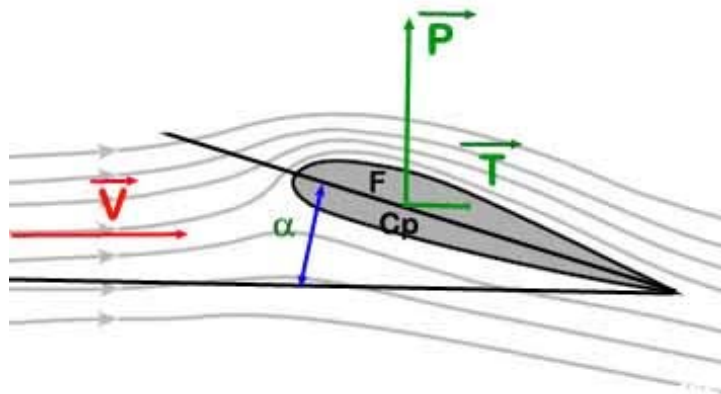
Pour un profil donné, \mathbf{F}_a et C_p dépendent de l'angle d'incidence α . Pour un angle d'incidence α « pas trop grand » [typiquement de -10 à $+12$ à 15°]

- Si α augmente, \mathbf{F}_a augmente et le centre de poussée C_p avance.
- Le centre de poussée est a priori distinct de l'axe Δ : le moment de \mathbf{F}_a par rapport à Δ va avoir tendance à faire tourner l'aile autour de cet axe : « moment piqueur ».

* Classiquement, on décompose \mathbf{F}_a

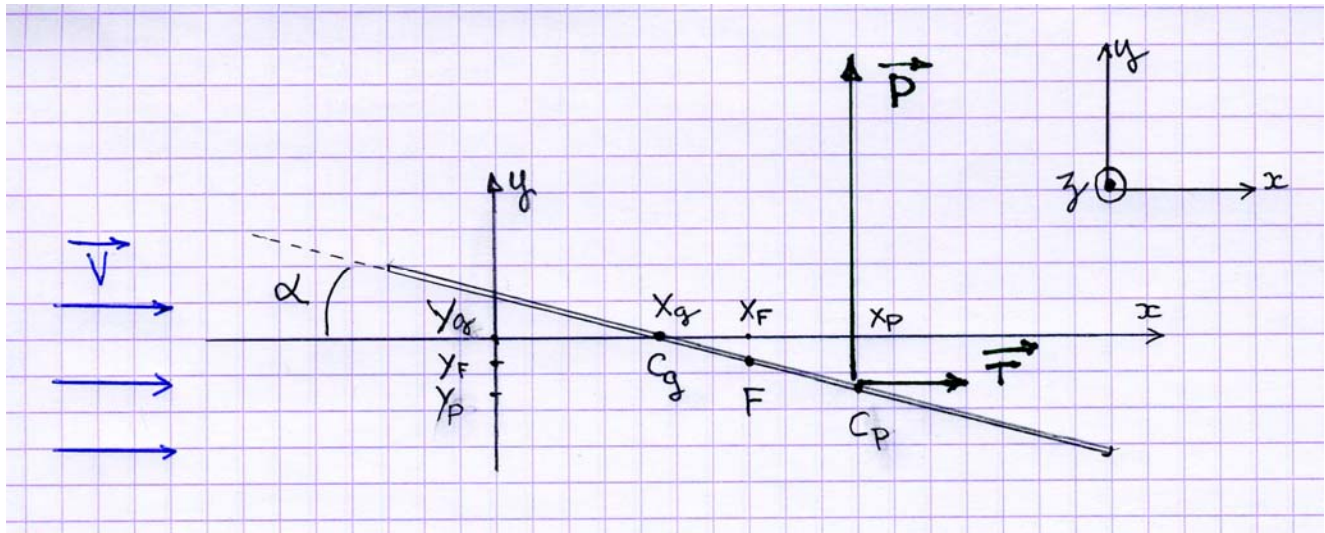
- en composante // au flux d'air (\mathbf{T}) appelée « traînée »
- et composante perpendiculaire au flux d'air appelée « portance » (\mathbf{P}).

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$



Rappel

Voir Annexe 1 pour la définition du moment d'une force par rapport à un point ou un axe.



Le moment de \mathbf{F}_a par rapport au centre de gravité C_g s'écrira :

$$\vec{M}(\mathbf{F}_a)/C_g = \vec{C_g C_p} \wedge \vec{F}_a$$

Ou algébriquement

$$M(\mathbf{F}_a)/C_g = C_g C_p \cdot \cos \alpha \cdot P + C_g C_p \cdot \sin \alpha \cdot T = P \cdot X_g X_p + T \cdot X_g X_p$$

Approximations :

- le profil est mince (épaisseur relative 10 %) : Les points C_g , C_p et F seront alignés.
- l'angle d'incidence reste « petit » $\alpha < 10^\circ$ $\cos(10) = 0,985$ à moins de 3 % près on peut écrire $\cos(\alpha) = 1$, et aussi $\sin \alpha < 0,17$.
- La traînée T est, dans le domaine d'incidences de l'aile, très petite par rapport à la portance P

On aura $T \cdot \sin \alpha \ll P \cdot \cos \alpha$

Le moment de la traînée pourra être négligé devant celui de la portance.

$$M(\mathbf{P})/C_g = C_g C_p \cdot \cos \alpha \cdot P = P \cdot (X_p - X_g)$$

Si on introduit le foyer F dans cette relation le moment de la portance par rapport à C_g s'écrit :

$$M(\mathbf{P})/C_g = P \cdot (X_p - X_g) = P \cdot (X_p - X_f) + P \cdot (X_f - X_g)$$

L'interprétation physique des deux termes est la suivante :

$P \cdot (X_p - X_f)$ = Moment de la portance \mathbf{P} par rapport au foyer F .

$P \cdot (X_f - X_g)$ = Moment de la portance \mathbf{P} par rapport au C_g si elle est supposée appliquée au foyer F .

Mais nous avons vu (girouette) que le foyer a la propriété que le moment de la force aérodynamique ne dépend pas de l'angle d'incidence [voir « Girouette »]. Le moment de la portance par rapport au foyer sera constant et on le notera M_o .

$$P \cdot (X_p - X_f) = M_o$$

Finalement le moment de la portance par rapport au centre de gravité s'écrira :

$$M(\mathbf{P})/C_g = P \cdot (X_f - X_g) + M_o$$

Aérodynamiquement, **tout se passe comme si** l'aile était soumise

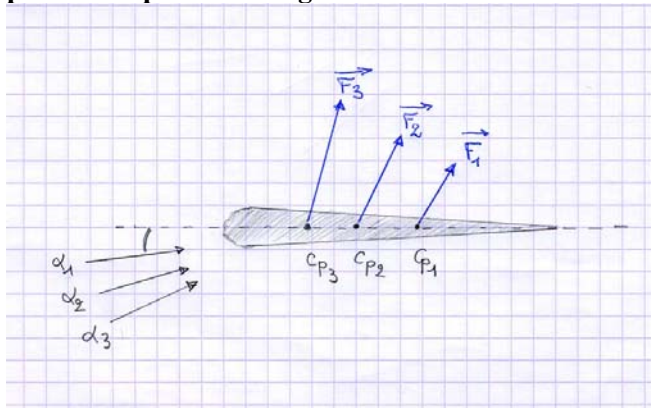
- à **une force P (portance) appliquée au foyer F ,**
- et à **couple de moment M_o indépendant de l'angle d'incidence.**

Rappel : dans ce résultat la traîne est négligée.

Dans la suite le couple de moment M_o sera appelé « **couple de tangage** ».

On a **équivalence entre les deux modélisations** des actions aérodynamiques subies par l'aile :

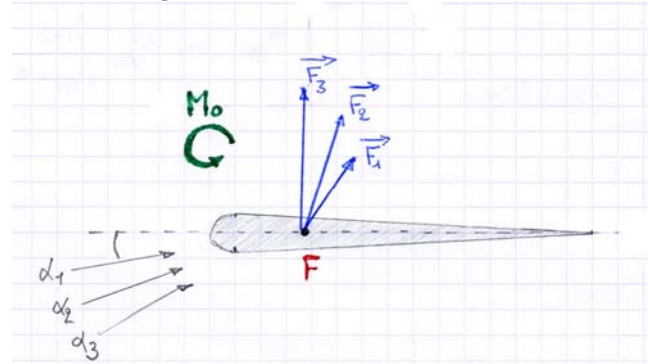
La résultante **F** des actions aérodynamiques subies par l'aile s'applique au **centre de poussée Cp** dont la **position dépend de l'angle d'incidence**.



Le centre de poussée avance lorsque l'angle d'incidence augmente, tandis que F augmente.

La résultante des actions aérodynamiques subies par l'aile se traduit par :

- 1) Une force **F** appliquée au foyer **F**, **point fixe** de l'aile,
- 2) Un couple **Mo** de moment **indépendant de l'angle d'incidence**.



La force F augmente lorsque l'angle d'incidence augmente.

Dans toute la suite nous utiliserons le modèle faisant intervenir le foyer aérodynamique qui permet une étude beaucoup plus facile.

Remarque :

Il peut paraître surprenant que $P \cdot (X_p - X_f) = \text{Moment de la portance } P \text{ par rapport au foyer } F$ ne dépende pas de l'angle d'incidence α . Mais P et Cp dépendent tous deux de cet angle.

Si α augmente P(α) augmente et Cp se déplace vers l'avant, se rapprochant du foyer. On comprend que les deux variations puissent « se compenser ».

Conclusion provisoire

Pour connaître le comportement aérodynamique d'une aile, il faut connaître son foyer et le moment Mo.

- Pour le foyer la question est résolue : dans les limites de la précision de nos calculs (de l'ordre de 3 %), le foyer est à 25 % de la corde du profil en arrière du BA de l'aile, **indépendamment du profil**.
- Pour le moment Mo, nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'il dépend du profil et comment il est déterminé.

EXPRESSION DES FORCES et MOMENTS

Pour poursuivre il nous faut maintenant donner les expressions des actions subies par une aile, c'est à dire

- de la portance
- de la traînée
- du moment « de tangage »

Ces grandeurs dépendent :

- de la géométrie de l'aile
 - **profil**, corde (C), aire (S)
- de la masse volumique de l'air (ρ)
- de la vitesse relative de l'air par rapport à l'aile V
- de l'**angle d'incidence (α)**

L'expérience montre que portance et traînée ont les expressions suivantes :

<p>Portance Composante perpendiculaire à V</p> $P = \frac{1}{2} \rho \cdot C_Z \cdot S \cdot V^2$ <p>Cz coefficient de portance</p>	<p>Traînée Composante colinéaire à V</p> $T = \frac{1}{2} \rho \cdot C_X \cdot S \cdot V^2$ <p>Cx coefficient de traînée</p>
---	--

Avec ρ masse volumique de l'air
 S surface de l'aile
 V vitesse relative de l'air par rapport à l'aile.
 de l'aile

Unités : on vérifie immédiatement que le coefficient de portance est une grandeur sans dimension.

b) L'expérience montre que le **Moment** du couple aérodynamique, peut s'écrire

$$M_o = \frac{1}{2} \rho \cdot C_m \cdot L \cdot S \cdot V^2$$

C_m coefficient de moment

L corde de l'aile

S surface de l'aile

Unités : on vérifie immédiatement que le coefficient de portance est une grandeur sans dimension.

Remarque : le moment d'un couple est indépendant du point où il est calculé. Selon la situation, il se manifestera par une tendance à la rotation autour :

- du point de fixation de l'aile sur le support de la balance aérodynamique si l'aile est dans une soufflerie,
- du centre de gravité si l'aile est montée sur un aéronef en vol.

COEFFICIENT DE PORTANCE C_z

Remarque

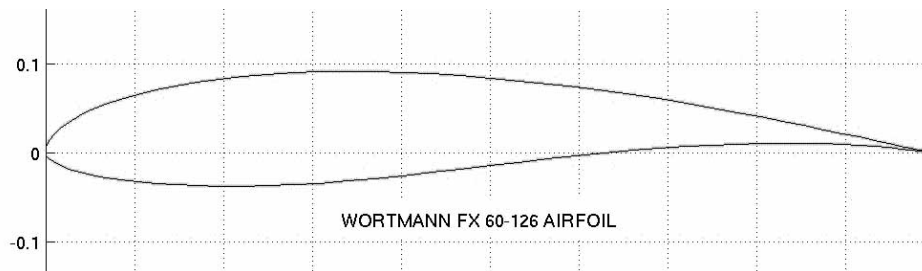
Avant de commencer il faut préciser que les résultats présentés dans les paragraphes qui suivent sont déduits de mesures en souffleries (physiques ou numériques) et correctement interprétés par la théorie.

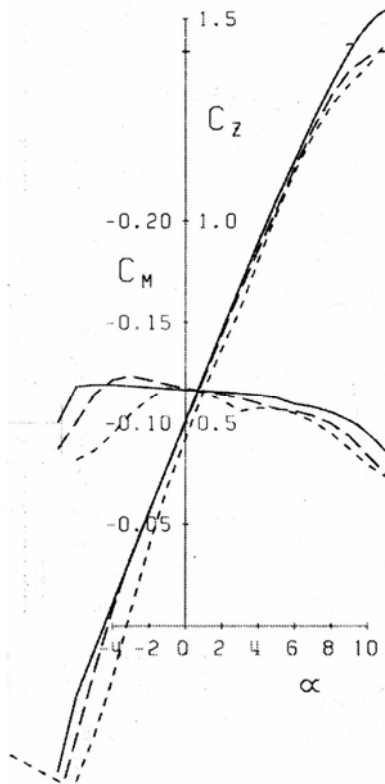
A priori on s'attend à ce que le coefficient de portance dépende :

- de la géométrie du profil (courbure, épaisseur relative)
- de l'angle d'incidence
- du nombre de Reynolds auquel le profil « travaille ».

Prenons un exemple pour mettre en évidence les propriétés du coefficient de portance.

Soit le profil Wortmann **FX 60-126**, profil qui a été utilisé pour des planeurs grandeurs [exemple ?] mais aussi par des aéromodélistes qui continuent à l'utiliser encore de nos jours.





On trouve dans tout catalogue les coordonnées du profil, les données :

- Epaisseur relative : 12,6 %
- Angle d'incidence à portance nulle = - 4,6°
- $C_{m0} = - 0,122$
- $C_z \text{ max} = 1,4$

Ainsi que diverses courbes dont celle-ci-contre donnant

- le coefficient de portance C_z en fonction de l'angle d'incidence
- le coefficient de moment C_m en fonction de l'angle d'incidence.

* Notons que l'angle d'incidence α varie entre $- 5^\circ$ et $+ 10^\circ$, ce qui correspond au domaine « normal » classique.

Que nous disent ces courbes ?

- a) Plusieurs courbes ont été tracées (pour C_z et C_m), distinguées par des tirets différents : il s'agit de tracés correspondant à des **nombre de Reynolds** différents.

Conclusion :

On peut admettre que les coefficients de portance et de moment **ne dépendent pas du nombre de Reynolds** (dans le domaine étudié).

b) C_z est linéaire en fonction de α , jusqu'à un angle d'incidence de 8° environ, avec la valeur maximale $C_z \text{ max} = 1,4$,

C_z s'annule pour un angle d'incidence donné (**angle de portance nulle**) α_0 ($- 4,6^\circ$ pour notre exemple)

Pour un angle d'incidence nul C_z vaut 0,5 (pour notre exemple).

On peut écrire :

$$C_z(\alpha) = A_\infty \cdot (\alpha - \alpha_0)$$

La pente (parfois appelée « **gradient de portance** ») de la droite étant égale à $(1,2 - 0) / (6 - (- 4,6)) = 0,113$ si les angles sont exprimés en degrés.

GENERALISATION

L'expérience (corroborée par la théorie) montre que, dans le cas de profils d'épaisseur relative pas trop grande ($< 12-13\% =$ « **profils minces** »), les résultats précédents se généralisent à **tout profil** :

Coefficient de portance pour une aile d'allongement infini

- Il peut être considéré comme indépendant du **nombre de Reynolds**, pour une plage allant de 50000 à 500000 (c'est un ordre de grandeur), correspondant à des aérodynamiques de **modèles réduits** d'avions ou de planeurs,
- Il varie linéairement en fonction de l'angle d'incidence α , tant que ce dernier n'atteint pas la valeur de décrochage :

$$C_z(\alpha) = A_\infty \cdot (\alpha - \alpha_0)$$

α_0 étant l'angle de portance nulle et $A_\infty = \frac{dC_z(\alpha)}{d\alpha}$ le gradient de portance (coefficient directeur (pente) de la partie rectiligne de la courbe).

- Dans le cas d'une aile d'allongement λ infini, le gradient de portance a la même valeur pour tous les profils :

$$A_\infty = \left(\frac{dC_z}{d\alpha} \right)_{\lambda=\infty} = 0,113 \text{ en degré}^{-1}$$

INFLUENCE DE L'ALLONGEMENT DE L'AILE

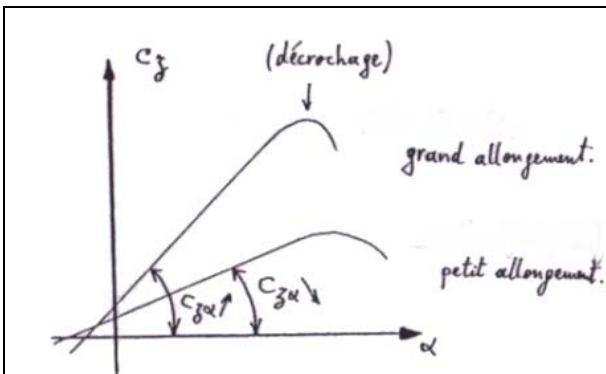
Les résultats précédents s'appliquent à une aile théorique dont l'allongement serait infini. Dans le cas d'une aile réelle, d'allongement fini, l'expérience montre que le gradient de portance dépend :

- de l'**allongement** λ de l'aile
- de la **flèche** de l'aile

Rappel : Allongement λ d'une aile

Rapport (sans dimension) entre carré de l'envergure E et aire S de la surface de l'aile

$$\lambda = \frac{E^2}{S}$$



[Balligand]

Le gradient de portance $A_\lambda = \frac{dCz(\alpha)}{d\alpha}$

diminue lorsque l'allongement de l'aile diminue.

[Champenois p 21]

Pour un allongement λ on peut modéliser le gradient de portance par la **formule empirique de DIEHL** :

$$A_\lambda = \left(\frac{dCz(\alpha)}{d\alpha} \right)_\lambda = A_\infty \frac{\lambda}{\lambda + a}$$

$$= 0,113 \cdot \frac{\lambda}{\lambda + 1,8}$$

Exprimé en degré⁻¹

Le coefficient numérique a = 1,8 est sans dimension (comme l'allongement)

[Champenois p 20 et 108]

On trouve aussi la valeur a = 2 selon les sources.

Cette formule étant empirique, on peut trouver dans la littérature des valeurs du coefficient a = 1,8 un peu différentes, par exemple 2.

Applications numériques (avec a = 1,8)

Allongement λ	A_λ (degré ⁻¹) (a = 1,8)	A_λ (degré ⁻¹) (a = 2)	Ecart en % avec A_∞
30	0,104	0,105	8,0
25	0,103	0,104	8,9
20	0,101	0,102	10,6
15	0,098	0,098	13,3
10	0,093	0,094	17,8
5	0,081	0,080	28,3

Conclusions

L'écart entre les résultats avec a = 1,8 ou a = 2 n'est pas significatif.

En revanche, l'influence de l'allongement sur le gradient de portance est très sensible et, dans la mesure du possible, nous en tiendront compte dans les calculs ultérieurs.

Remarque : la forme du saumon de l'aile a aussi une influence sur la valeur de Cz_α , par exemple pour une aile rectangulaire ou elliptique.

Mais l'écart entre les valeurs numériques ne dépasse pas 4% jusqu'à des allongements de $\lambda = 5$. Ce facteur pourra être négligé devant l'influence de l'allongement.

Remarque : On ne discute pas ici de l'influence de la flèche sur le coefficient de portance.

Coefficient de portance pour une aile d'allongement λ fini

- Il varie linéairement en fonction de l'angle d'incidence α , tant que ce dernier n'atteint pas la valeur de décrochage :

$$C_z(\alpha) = A_\lambda \cdot (\alpha - \alpha_0)$$

α_0 étant l'angle de portance nulle et $A_\lambda = \frac{dC_z(\alpha)}{d\alpha}$ le gradient de portance (coefficient directeur (pente) de la partie rectiligne de la courbe $C_z(\alpha)$).

$$A_\lambda = \left(\frac{dC_z(\alpha)}{d\alpha} \right)_\lambda = A_\infty \frac{\lambda}{\lambda + a}$$

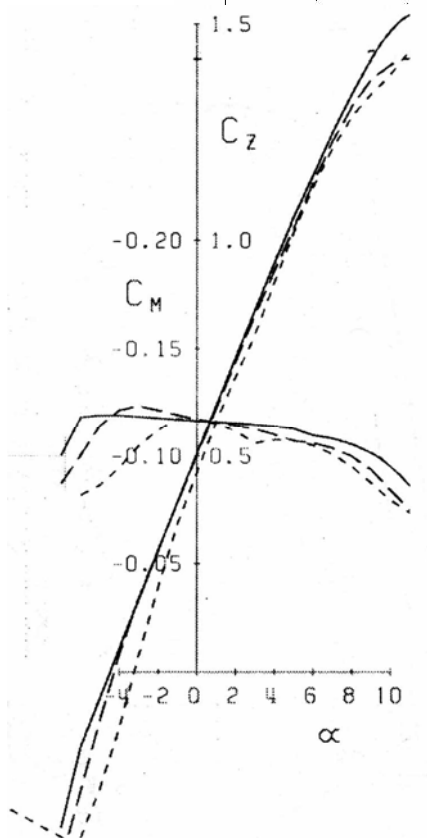
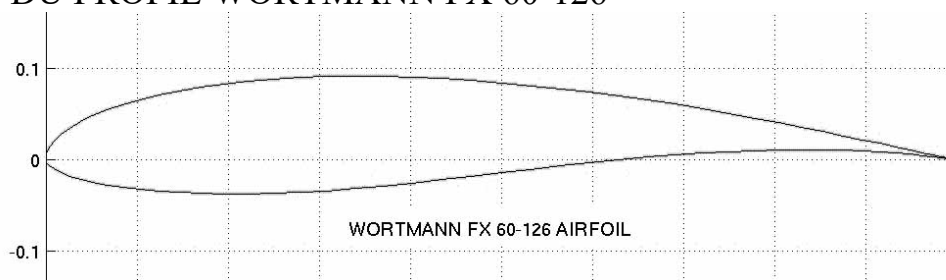
Dans le cas d'une aile d'allongement λ infini, le gradient de portance a la même valeur pour tous les profils :

Avec $A_\infty = \left(\frac{dC_z}{d\alpha} \right)_{\lambda=\infty} = 0,113$ (angle d'incidence en degrés)

Et $a = 1,8$ ou 2 (selon sources) (nombre sans dimension)

COEFFICIENT DE MOMENT

EXEMPLE DU PROFIL WORTMANN FX 60-126



On discute maintenant des courbes $C_M(\alpha)$:

- a) Plusieurs courbes ont été tracées (pour C_z et C_m), distinguées par des tirets différents : il s'agit de tracés correspondant à des **nombre de Reynolds** différents.

Conclusion :

On peut admettre que le coefficient de moment **ne dépend pas du nombre de Reynolds** (dans le domaine étudié).

- b) Avec une approximation « acceptable » on peut admettre que **le coefficient de portance ne dépend pas de l'angle d'incidence**.

On le notera C_{m0} et sa valeur est donnée dans la « littérature » :

$$C_{m0} = -0,122$$

On peut le lire sur les courbes ci-contre mais avec une valeur positive ??

GENERALISATION

Le coefficient de moment C_{m0} ne dépend donc (en grandeur et en signe) que du profil de l'aile, et plus particulièrement de sa courbure.

Signe du couple de tangage :

Conventionnellement, le couple de tangage sera compté positivement s'il a tendance à faire tourner l'aile dans le sens des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire s'il a tendance à augmenter l'angle d'incidence. On parle de « **couple cabreur** ».

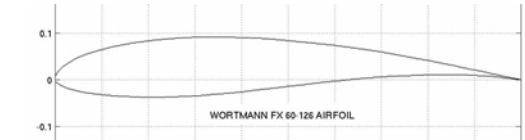
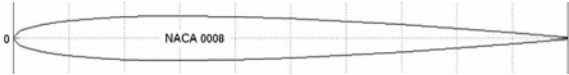
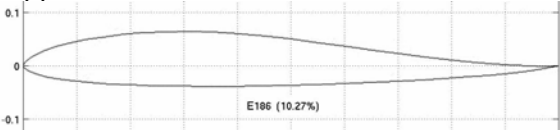
Le coefficient de moment C_{m0} sera affecté d'un signe « + ».

Dans le cas contraire, on parlera de « **couple piqueur** ».

Le coefficient de moment sera affecté d'un signe « - ».

L'effet piqueur ou cabreur du couple de tangage dépend du profil et plus précisément de sa **courbure** (ou **cambrure**).

On distingue trois types de profils :

<p>Profil à courbure positive Ex FX 60-126</p>  <p>$C_{m0} = - 0,122$</p>	<p>Le couple de tangage est « piqueur » (<i>l'incidence de l'aile a tendance à diminuer sous l'effet de ce couple</i>) Le coefficient de moment C_{m0} est négatif, d'après la convention de signe précédente.</p>
<p>Profil symétrique (courbure nulle) Ex NACA 0008</p>  <p>$C_{m0} = 0$</p>	<p>Si la courbure du profil est nulle (profil symétrique), le couple de tangage est nul donc $C_{m0} = 0$.</p>
<p>Profil à double courbure Ex Eppler 186</p>  <p>$C_{m0} = + 0,00529$</p>	<p>Si le profil est à double courbure le couple de tangage est « cabreur », C_{m0} est positif.</p>

CATALOGUES DE PROFILS

Les coefficients C_z , C_x et C_{m0} d'un profil peuvent être :

- Mesurés grâce à des études en soufflerie,
- Calculés à l'aide de logiciels spécialisés (souffleries numériques. Ex : XFOIL pour les modélistes)

Dans la littérature spécialisée, ou sur la Toile, on trouve des listes de profils avec leurs caractéristiques.

Exemples :

- Site **Airfoil Tools**

Courbes du profil, fichier DAT, image, polaires...

<http://airfoiltools.com/search/index>

- Site UIUC « **Aifoil coordinates database** »

Fichier .DAT et image du profil

https://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html

- **Aérodynamique – 164 profils et leurs polaires**

RCM Hors Série n° 2 décembre 1998

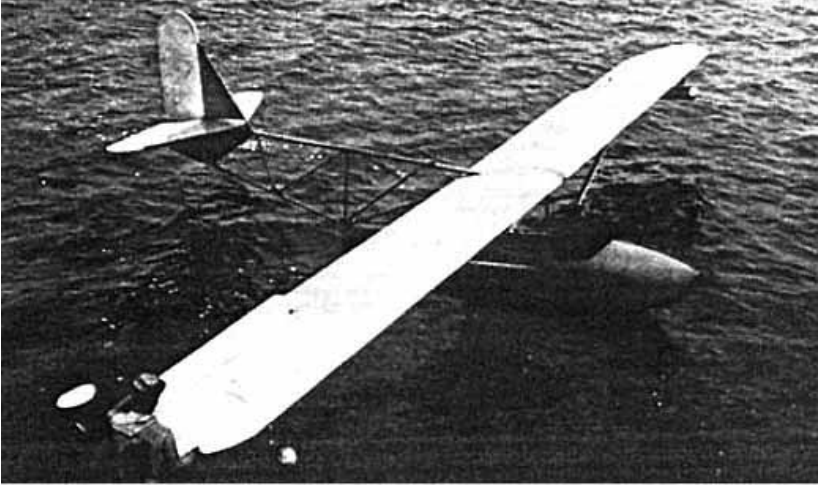

FOYER D'UN AERONEF (AXE de TANGAGE) CAS DU FUSELAGE NEGLIGÉ


Nous savons déterminer de façon suffisamment précise (pour notre usage modéliste) le foyer des « plans » [aile et stab] du planeur. Dans ce paragraphe nous allons voir comment déterminer le foyer d'un appareil fictif constitué uniquement de deux plans (donc en négligeant l'influence du fuselage).

Nous essayerons ultérieurement de voir dans quelle mesure cette hypothèse est acceptable ou non.

Considérons donc un planeur hypothétique constitué de deux « plans » de configuration déterminée.

Nous parlons de « **plans** » afin de rester le plus général possible dans la configuration aérodynamique de l'appareil.

Type d'aéronef	Plan avant	Plan arrière
<p style="text-align: center;">Planeur « classique »</p> <p>Si le plan avant (dans le sens de déplacement du planeur) est de surface nettement plus grande que le plan arrière, le plan avant sera l'aile et le plan arrière le stabilisateur horizontal (configuration la plus fréquemment rencontrée)</p>  <p><i>Tomaszewski-Muraszew MT-1, hydroplaneur polonais (1936) [J2mcL-Planeurs]</i></p>	aile	Stabilisateur horizontal
<p style="text-align: center;">Tandem</p> <p>Si le plan avant a une surface du même ordre de grandeur que celle du plan arrière, l'appareil est dit « à ailes en tandem »</p>  <p><i>Alérion Peyret à Itford Hill (1923) – pilote Alexis Maneyrol [Vieilles Plumes n° 12]</i></p>	Aile avant	Aile arrière

Canard	Plan canard	Aile
<p>Si le plan avant est nettement plus petit que le plan arrière, il s'agit d'un « canard ».</p>  <p><i>K-16 Kamo, planeur canard japonais (1945) [J2mcL-Planeurs]</i></p>		

Remarque : les appareils de type « Pou du Ciel » seront rangés dans la catégorie des « tandems » les deux ailes n'étant pas de surfaces très différentes.

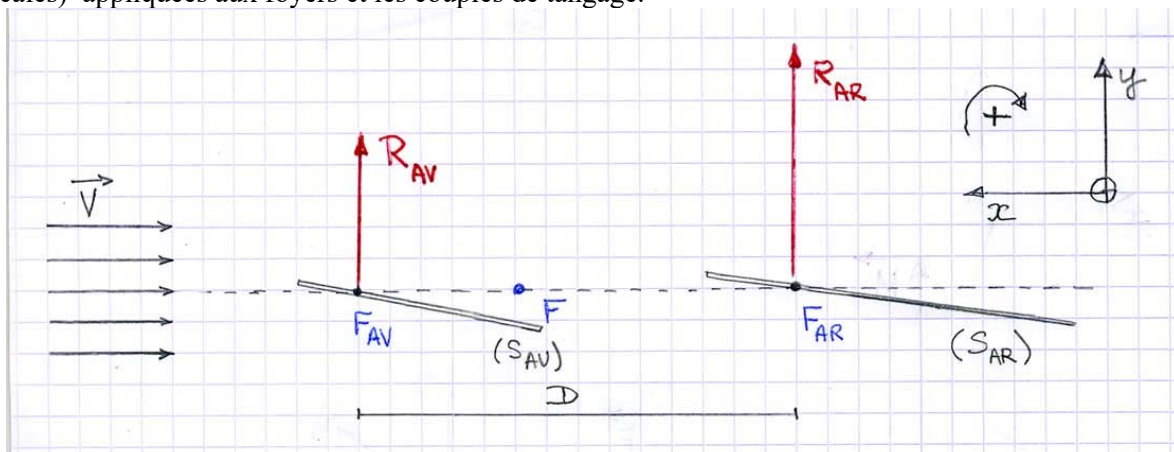
FOYER GLOBAL EN NEGLIGEANT LE FUSELAGE

On considère un modèle d'aéronef uniquement constitué de deux « plans » fixes l'un par rapport à l'autre. Nous parlons de « plans » pour les surfaces « portantes » et non pas d'aile et de stabilisateur ou plan canard, afin que les résultats que nous allons établir puissent être appliqués à toute configuration aérodynamique (planeur « classique », canard ou tandem). Aussi parlerons-nous simplement de « plan avant » et « plan arrière »

Hypothèses

- h1) Les profils sont « minces » (épaisseur relative ne dépassant pas 12 à 15 %)
- h2) Les foyers F_{AV} et F_{AR} sont à 25 % de la corde en arrière du bord d'attaque pour chacun des plans.
- h3) Les angles d'incidence α_{AV} et α_{AR} restent « petits » (< 10-12°)
- h4) L'entreplan vertical est nul (les foyers des deux plans sont dans un même plan horizontal)

Enfin nous modélisons l'ensemble des actions aérodynamiques subies par les deux plans par les portances (verticales) appliquées aux foyers et les couples de tangage.



La distance entre les deux foyers est $F_{AV}F_{AR} = D$

Eh : **Entreplan horizontal** = distance entre bord de fuite du plan avant et bord d'attaque du plan arrière.

<p>Plan avant Surface S_{AV} Corde moyenne C_{AV} Coefficient de portance C_{ZAV} Portance</p> $R_{AV} = \frac{1}{2} \rho \cdot C_{ZAV} \cdot S_{AV} \cdot V^2$ <p>Couple de tangage</p> $Mo_{AV} = \frac{1}{2} \rho \cdot C_{moAV} \cdot C_{AV} \cdot S_{AV} \cdot V^2$	<p>Plan arrière Surface S_{AR} Corde moyenne C_{AR} Coefficient de portance C_{ZAR} Portance</p> $R_{AR} = \frac{1}{2} \rho \cdot C_{ZAR} \cdot S_{AR} \cdot V^2$ <p>Couple de tangage</p> $Mo_{AR} = \frac{1}{2} \rho \cdot C_{moAR} \cdot C_{AR} \cdot S_{AR} \cdot V^2$
--	--

Avec ρ masse volumique de l'air
 S surface du plan
 C corde aérodynamique moyenne du plan
 V vitesse relative de l'air par rapport au plan.

Question : **Déterminer la position du foyer relatif à l'axe de tangage de l'ensemble des deux plans ?**

RAPPEL

Le moment des forces aérodynamiques par rapport au foyer est indépendant de l'angle d'incidence.
 Lorsque l'assiette varie (variation de l'angle d'incidence), le moment reste constant, en d'autres termes sa **variation est nulle**.

Nous allons donc exprimer le moment total des actions aérodynamiques, par rapport au foyer global puis écrire que sa variation est nulle.

Remarque :

Toutes les relations sont **algébriques** (Cela signifie par exemple que $FF_{AV} = -F_{AV}F$)

Les orientations des axes sont précisées dans la figure précédente.

Le moment total par rapport au foyer global F s'écrit :

$$Mt_F = R_{AV} \cdot FF_{AV} + Mo_{AV} + R_{AR} \cdot FF_{AR} + Mo_{AR}$$

Pour une variation de l'angle d'incidence $d\alpha$ la variation du moment total sera :

$$dMt_F = dR_{AV} \cdot FF_{AV} + dR_{AR} \cdot FF_{AR}$$

(En effet les couples de tangage étant indépendants de l'angle d'incidence, leur variation est nulle)

Et la variation du moment total par rapport au foyer global étant nulle :

$$\begin{aligned} dR_{AV} \cdot FF_{AV} &= -dR_{AR} \cdot FF_{AR} \\ dR_{AV} \cdot F_{AV} F &= dR_{AR} \cdot FF_{AR} \quad (1) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} dR_{AV} &= (\frac{1}{2} \rho \cdot V^2) \cdot S_{AV} \cdot dC_{ZAV} \\ dR_{AR} &= (\frac{1}{2} \rho \cdot V^2) \cdot S_{AR} \cdot dC_{ZAR} \end{aligned}$$

(1) devient

$$FF_{AV} \cdot S_{AV} \cdot dC_{ZAV} = FF_{AR} \cdot S_{AR} \cdot dC_{ZAR} \quad (2)$$

Il faut exprimer les variations de portance des deux plans dC_{ZAV} et dC_{ZAR}

Pour une aile d'allongement λ le coefficient de portance est

$$Cz(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda}{\lambda + a} \cdot (\alpha - \alpha_0)$$

Quel que soit le profil nous avons les valeurs numériques suivantes :

$A_\infty = 0,113$ lorsque α est exprimé en degrés

Et $a = 2$ (pas d'unité) selon les sources

$$dCz = A_\infty \frac{\lambda}{\lambda + a} \cdot d\alpha$$

Finalement (2) devient

$$FF_{AV} \cdot S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} = FF_{AR} \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \quad (3)$$

Il sera plus commode d'exprimer la position du foyer F par rapport au foyer du plan avant F_{AV} :

$D = F_{AV}F_{AR} = F_{AV}F + FF_{AR}$ ou $FF_{AR} = D - F_{AV}F = D + FF_{AV}$
Reportée dans (3)

$$FF_{AV} \cdot S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} = (D + FF_{AV}) \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}$$

Soit la position du foyer global des deux plans par rapport au foyer du plan avant :

$$F_{AV}F = D \cdot \frac{S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}}{S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}} \quad (4)$$

Ou encore

$$F_{AV}F = D \cdot \frac{S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}}{S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}}$$

Soit aussi

$$F_{AV}F = \frac{D}{1 + \frac{S_{AV}}{S_{AR}} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AR}} \cdot \frac{\lambda_{AR} + a}{\lambda_{AV} + a}} \quad (5)$$

Rappel des hypothèses :

Cette relation permet de calculer la position du foyer global de deux plans constitués de profils minces, d'allongements finis, sans interaction (non prise en compte de la déflexion ou d'un effet de fente), les angles d'incidence restant « petits »...

PREMIERE APPLICATION

Nous allons nous faire une idée de l'influence de l'allongement sur la position du foyer global avec l'exemple numérique d'un planeur Canard :

Les applications numériques se rapporteront au RRG Ente, à l'échelle 1/5, avec les valeurs numériques suivantes :

Aile avant

Profil FX 60-126 (épaisseur relative 12,6%)
 $C_{m_0} = -0,122$ $\alpha_0 = -4,6^\circ$ (angle de portance nulle) $C_{z_{max}} = 1,4$
 Envergure $E_{AV} = 64$ cm
 Corde $C_{AV} = 18,4$ cm
 Surface $S_{AV} = 11,8$ dm²
 Allongement $\lambda_{AV} = 3,5$

Aile arrière

Même profil que l'aile avant
 Envergure $E_{AR} = 238$ cm
 Corde $C_{AR} = 34$ cm
 Surface $S_{AR} = 81$ dm²
 Allongement $\lambda_{AR} = 7$

Entreplan horizontal $E_h = 27$ cm
 Entreplan vertical $E_v = 7,7$ cm

Des données numériques précédentes nous calculons :

$$D = E_h + \frac{3}{4} C_{av} + \frac{1}{4} C_{ar} = 270 + \frac{3}{4} \cdot 184 + \frac{1}{4} \cdot 340 = 493 \text{ mm}$$

Dans la formule de Diehl nous prenons $a = 2$

$$\lambda_{av} = 3,5 \quad (\lambda_{av} / (\lambda_{av} + 2)) = 0,636$$

$$\lambda_{ar} = 7 \quad (\lambda_{ar} / (\lambda_{ar} + 2)) = 0,777$$

$$F_{AV}F = 493 \cdot \frac{81 \times 0,777}{11,8 \times 0,636 + 81 \times 0,777} = 451,2 \text{ mm}$$

F est 451,2 mm en arrière du foyer du plan canard, soit $493 - 451,2 = 41,8 \text{ mm en avant du foyer de l'aile}$

Le rapport de ces deux facteurs vaut $0,777 / 0,636 = 1,221$

$$F_{AV}F / FF_{AR} = 1,221 \cdot S_{AR} / S_{AV} = 1,221 \times 81 / 11,8 = 8,38$$

* Si on ne tient pas compte de l'allongement des plans (allongements infinis) la formule se simplifie en

$$F_{AV}F = \frac{D}{1 + \frac{S_{AV}}{S_{AR}}} = \frac{493}{1 + \frac{11,8}{81}} = 430,3 \text{ mm}$$

Dans ce cas le foyer global calculé est 21 mm plus en avant que dans le cas où les allongements sont pris en compte.

Conclusion

Il sera conseillé de tenir compte des allongements des plans pour le calcul de la position du foyer global.

* DETERMINATION GRAPHIQUE

[Harivel, MRA 587]

Cette méthode de calcul est une application graphique de la formule obtenue si les allongements des deux plans sont supposés infinis.

La relation (3) du paragraphe précédent peut s'écrire :

$$\frac{F_{AV}F}{FF_{AR}} = \frac{S_{AR}}{S_{AV}} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AV}} \cdot \frac{\lambda_{AV} + a}{\lambda_{AR} + a}$$

Si les allongements des deux plans sont supposés infinis elle devient :

$$\frac{F_{AV}F}{FF_{AR}} = \frac{S_{AR}}{S_{AV}}$$

Dans cette approximation, le foyer est au barycentre des surfaces des deux plans.

On peut construire géométriquement ce barycentre :

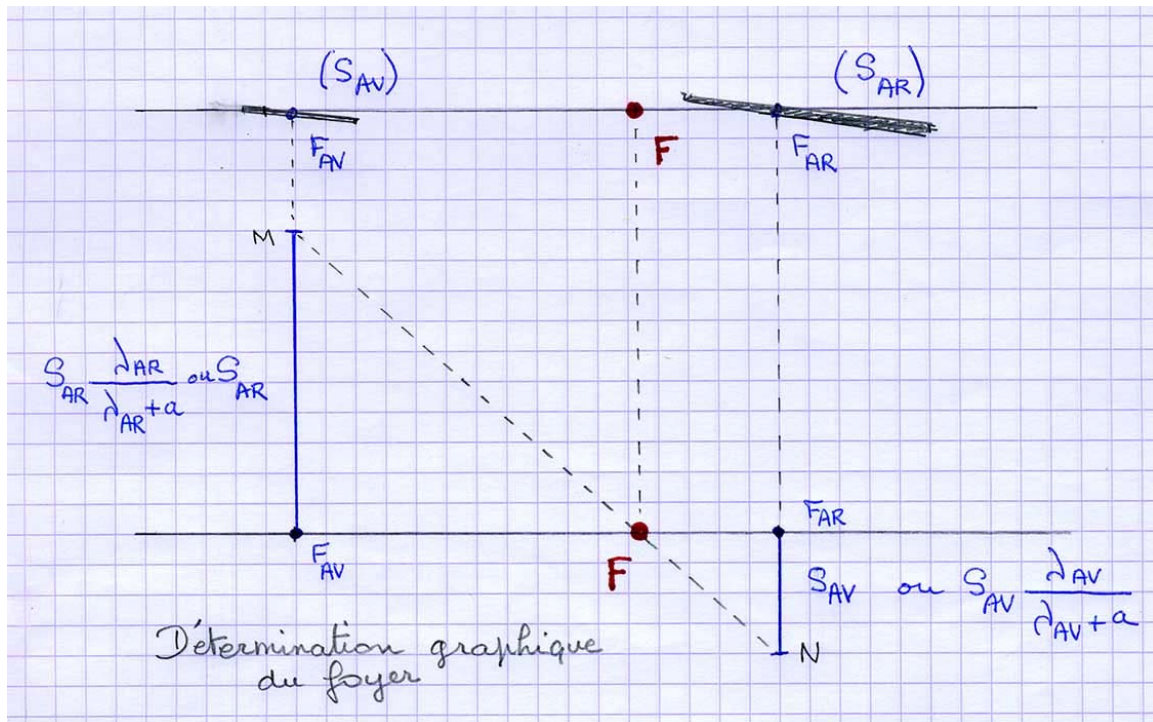
A une échelle donnée, positionner les foyers des plans avant et arrière sur une horizontale.

Prolonger les verticales passant par le foyer de chaque plan.

Reporter, vers le haut, sur la verticale passant par le foyer du plan avant, une longueur proportionnelle à la surface du plan avant.

Reporter, vers le bas, sur la verticale passant par le foyer du plan arrière, une longueur proportionnelle à la surface du plan arrière.

Joindre les extrémités M et N des deux segments précédents. Le segment MN coupe l'axe horizontal F qui est le foyer global des deux plans.



$S_{AV} < S_{AR}$: le modèle étudié est un canard.

Remarque

Cette méthode graphique s'applique aussi dans le cas où l'on tient compte de l'allongement fini des deux

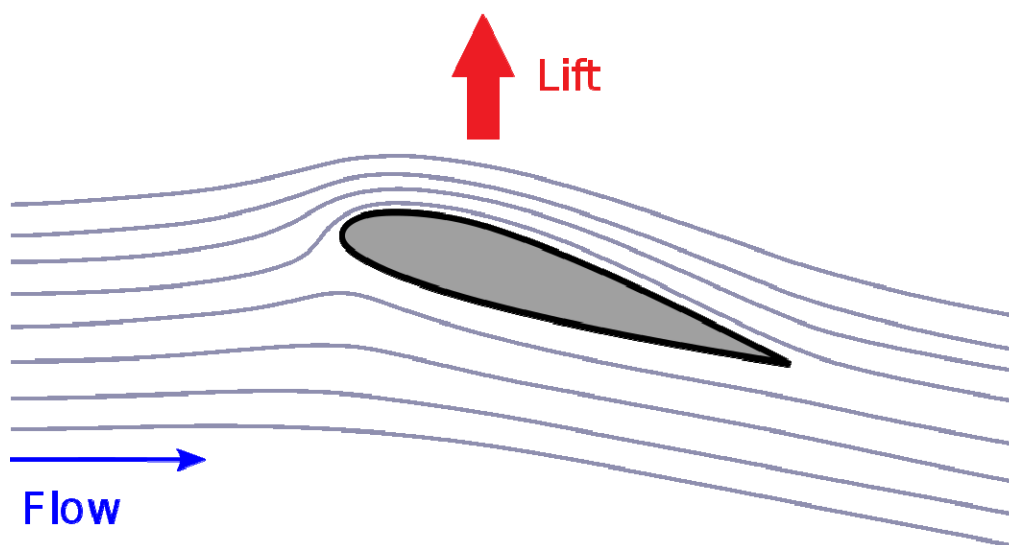
plans : il suffit de remplacer les surfaces S_{AV} et S_{AR} par $S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a}$ et $S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}$

respectivement.

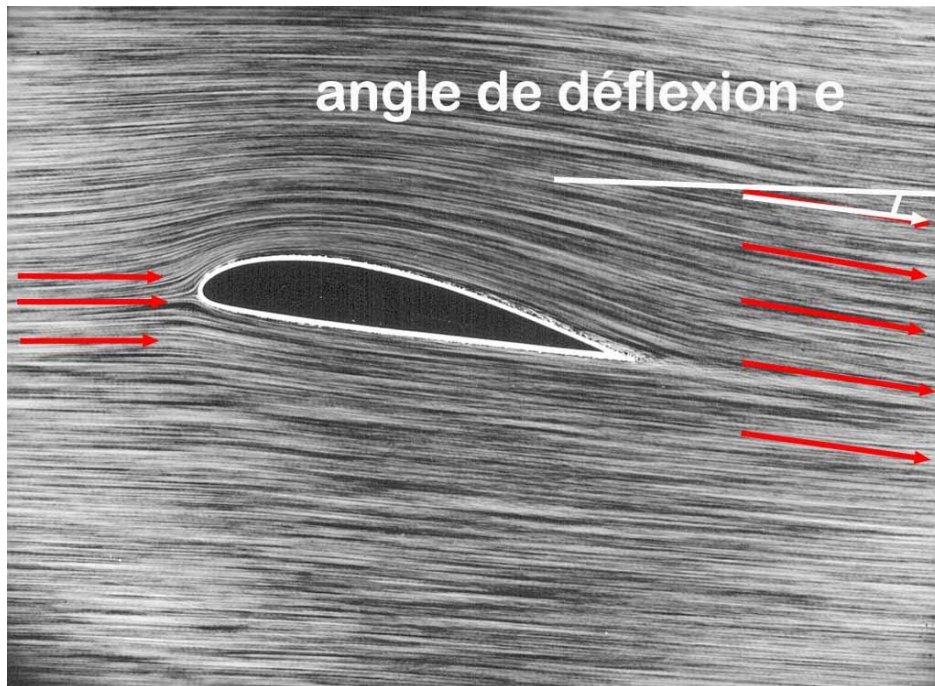
PRISE EN COMPTE DE LA DEFLEXION DE L'AIR PAR LE PLAN AVANT

DEFLEXION

Le plan arrière de notre modèle d'aéronef se trouve dans un flux d'air modifié par le plan avant. Les filets d'air sont déviés vers le bas par ce plan et forment avec les filets d'air en amont du plan un angle appelé angle de déflexion.

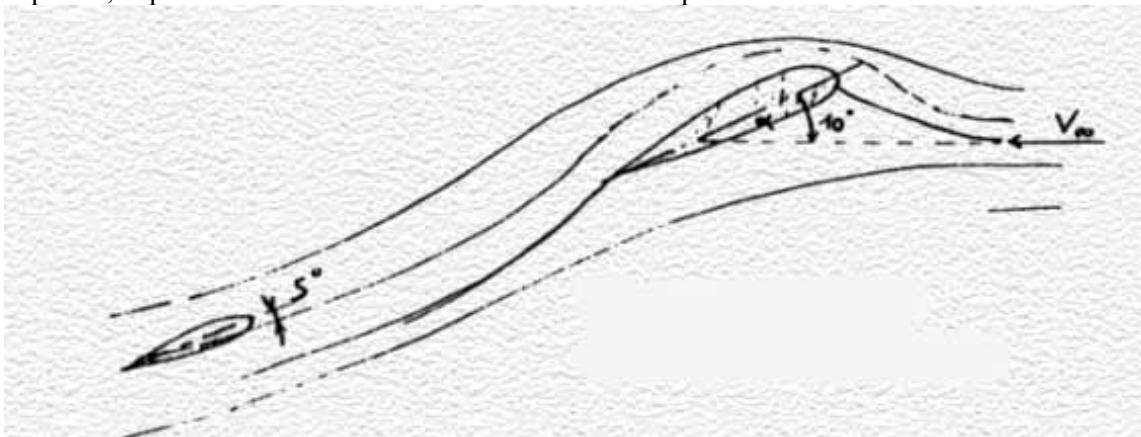


L'angle d'incidence du plan arrière sera donc diminué de l'angle de déflexion et sa portance sera modifiée. La photo ci-dessous montre que la déflexion s'étend en aval du plan avant au moins sur une corde au-dessus et au-dessous du plan avant, mais avec un angle qui diminue lorsque l'on d'autant plus haut ou plus bas.



Dans la figure ci-dessous l'appareil se déplace vers la droite. Les lignes de courant de l'air qui arrivent sur le plan avant (incidence de 10°) sont horizontales. Mais après le bord de fuite de ce plan ces lignes de courant ne sont plus horizontales : elles ont été défléchies vers le bas : c'est le phénomène de déflexion (downwash pour les anglo-saxons).

En conséquence, le plan arrière va avoir une incidence effective qui sera diminuée.



[Balligand, *Du centrage des Poux du Ciel*]

Remarque

Tout ce qui suit se rapporte à un plan fonctionnant sous une incidence inférieure au régime de décrochage (régime laminaire sur la photo ci-dessus).



Profil à incidence supérieure à l'angle de décrochage

Nous essayons dans ce paragraphe de tenir compte de ce phénomène et d'évaluer son influence sur la position du foyer global.

Il faut exprimer l'angle de déflexion en fonction des paramètres aérodynamiques du plan avant et de la position du plan arrière par rapport au plan avant.

Résultats qualitatifs

L'angle de déflexion

- est proportionnel au coefficient de portance C_z du plan avant,
- inversement proportionnel à l'allongement du plan avant.
- Dépend de la position du plan arrière par rapport au plan avant.

RESULTATS EMPIRIQUES

Il n'y a pas de formule rigoureuse de calcul de l'angle de déflexion, on trouve seulement dans la littérature quelques résultats empiriques.

De plus l'influence de la déflexion sera très différente selon la formule aérodynamique.

Dans le cas d'une configuration « classique » (stabilisateur horizontal à l'arrière), le plan arrière sera entièrement placé dans le flux d'air modifié par l'aile.

Les formules empiriques que nous verrons ensuite pourront s'appliquer plus ou moins correctement.

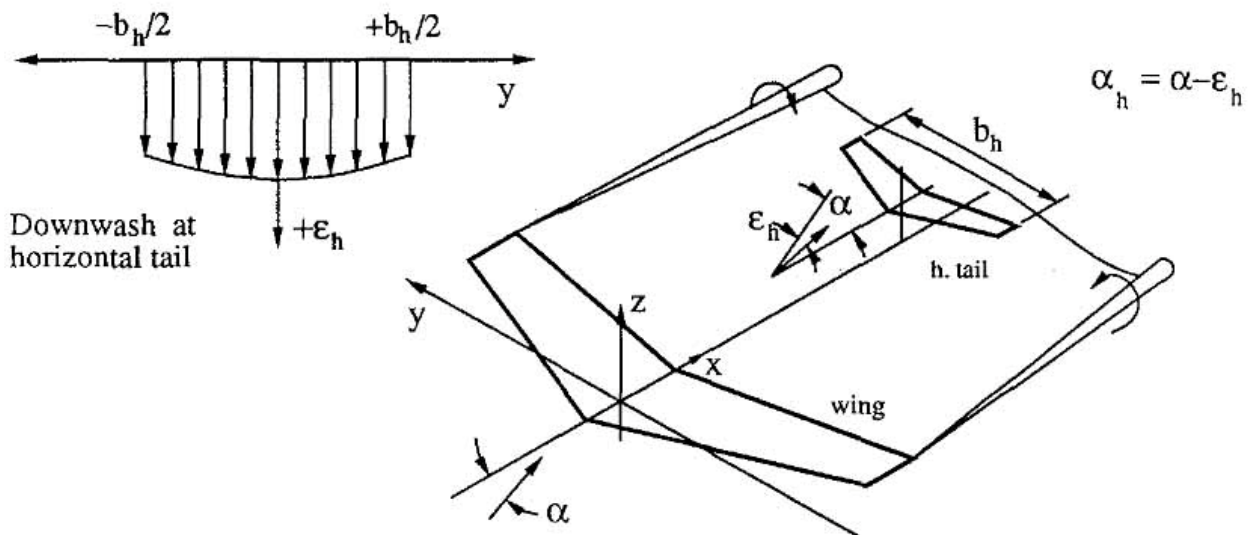


Figure 1: Downwash Field due to the Wing at the Horizontal Tail.

Dans le cas d'une configuration canard, le plan arrière (l'aile) ne sera que partiellement placée dans le sillage du plan canard.

Les formules empiriques ci-dessous ne pourront pas s'appliquer.

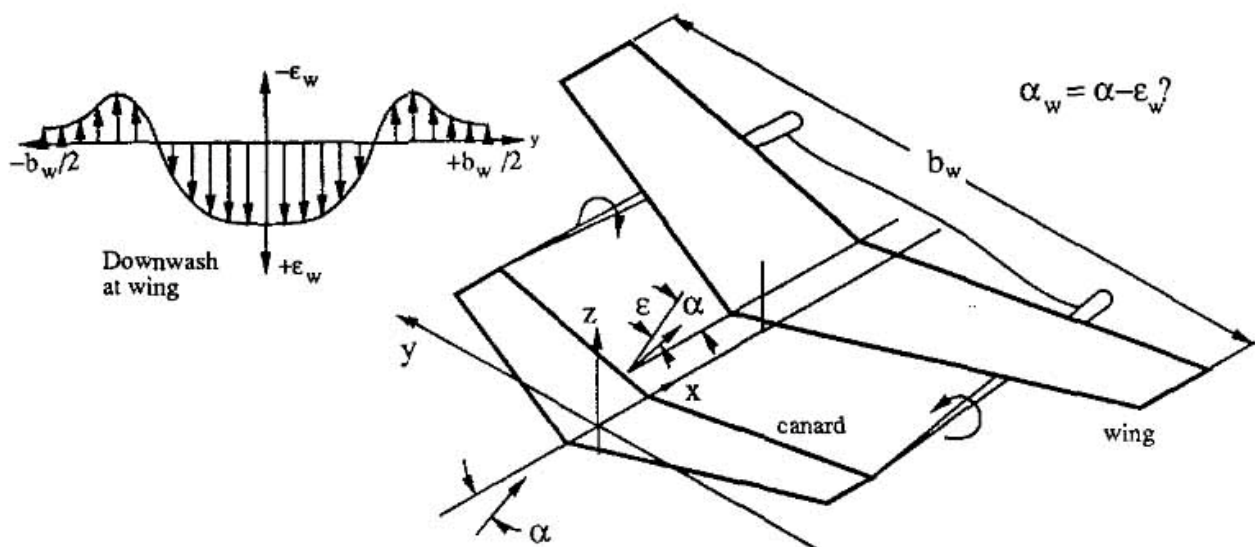


Figure 2: Downwash Field due to the Canard at the Wing.

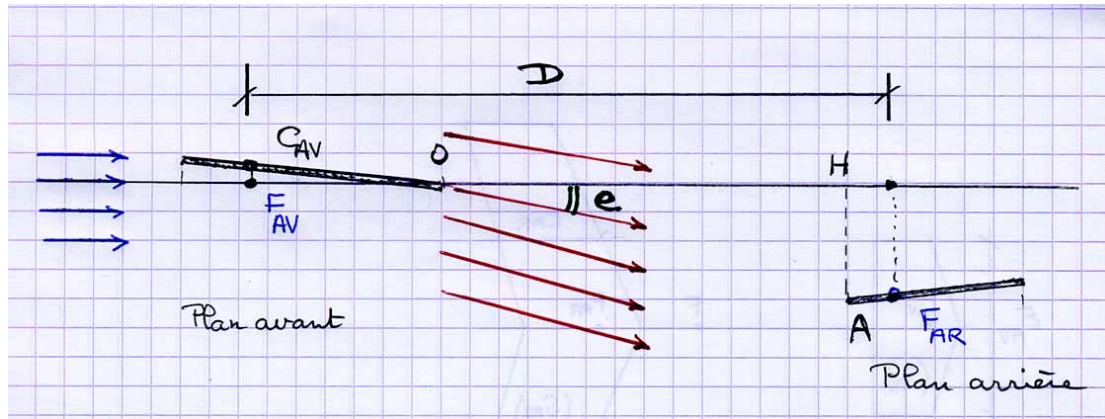
Ces figures sont extraites de ce document qui discute en détail de ce problème :

* Prediction of Average Downwash Gradient for Canard Configurations

<https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/77173/aiaa-1992-284-607.pdf?sequence=1>
[aiaa-1992-284-607.pdf](https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/77173/aiaa-1992-284-607.pdf)

Attention :

Les résultats qui suivent **ne s'appliquent qu'à une configuration "classique"** (aile avant et stabilisateur horizontal à l'arrière), le plan arrière étant entièrement plongé dans le flux d'air défléchi (ce qui n'est pas le cas pour un canard).



On définit

- e angle de déflexion
- D distance entre foyer de l'aile (plan avant) et foyer du stab (plan arrière)
- OH = Eh entreplan horizontal, distance entre BF de l'aile et BA du stab,
- HA = Ev entreplan vertical, distance verticale en BF de l'aile et BA du stab.
- E_{AV} envergure du plan avant (aile)
- C_{AV} corde aérodynamique moyenne (CAM) du plan avant (aile)
- λ_{AV} allongement de l'aile (plan avant)
- C_{ZAV} coefficient de portance de l'aile

FORMULE DE SCHMITZ

[Champenois, MRAérodynamique, p 108]

$$e = \frac{9,12 \cdot C_{ZAV}}{\lambda_{AV}} \cdot \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{E_{AV}}{2 \cdot D} \right)^2} \right]$$

(e = angle de déflexion exprimé en degrés)

FORMULE DE TOUSSAINT

[origine ?]

$$e = \frac{C_{ZAV}}{\lambda_{AV}} \cdot \left[43 - 3,25 \cdot \frac{OH}{C_{AV}} - 0,45 \cdot \frac{AH}{C_{AV}} \right]$$

(e = angle de déflexion exprimé en degrés)

THEORIE DE LA LIGNE DE PORTANCE

[Platon]

La déflexion de sillage est proportionnelle au Cz de l'aile et dépend de la position du stab par rapport à l'aile. La théorie de la ligne portante (Prandl 1918) donne la déflexion dans le cas d'une aile elliptique et pour un allongement de l'aile pas trop petit (typiquement > 4 ou 5)

$$e = \frac{2 \cdot C_{ZAV}}{\pi \cdot \lambda_{AV}} \quad (\text{angle en radians})$$

Il sera plus commode d'exprimer l'angle de déflexion en degrés :

$$e = \frac{2 \cdot C_{ZAV}}{\pi \cdot \lambda_{AV}} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{360}{\pi^2} \cdot \frac{C_{ZAV}}{\lambda_{AV}} \quad (\text{angle en degrés})$$

$$e = 32,47 \cdot \frac{C_{ZAV}}{\lambda_{AV}} \quad (\text{e en degrés})$$

Pour tenter de tenir compte de la position du stab Thierry Platon introduit un coefficient empirique K

$$e = 32,47 \cdot K \cdot \frac{C_{ZAV}}{\lambda_{AV}}$$

Il propose les valeurs suivantes pour ce coefficient empirique :

- K = 0,5 pour un stab en T
- K = 1 pour un stab situé au même niveau que l'aile

Remarque : aucune justification de ces valeurs !

Finalement avec l'expression de C_{ZAV}

$$e = 32,47.K.A_{\infty} \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot \frac{(\alpha - \alpha_0)}{\pi \cdot \lambda_{AV}}$$

Avec rappelons-le :

$$A_{\infty} = 0,113 \text{ (si angle en degrés)}$$

$$a = 2$$

ABAQUE DE CHABONAT

[Chabonat, *L'aérodynamique à portée de tous*, p 22]

L'abaque établie par Marcel Chabonat provient de mesures effectuées en soufflerie.

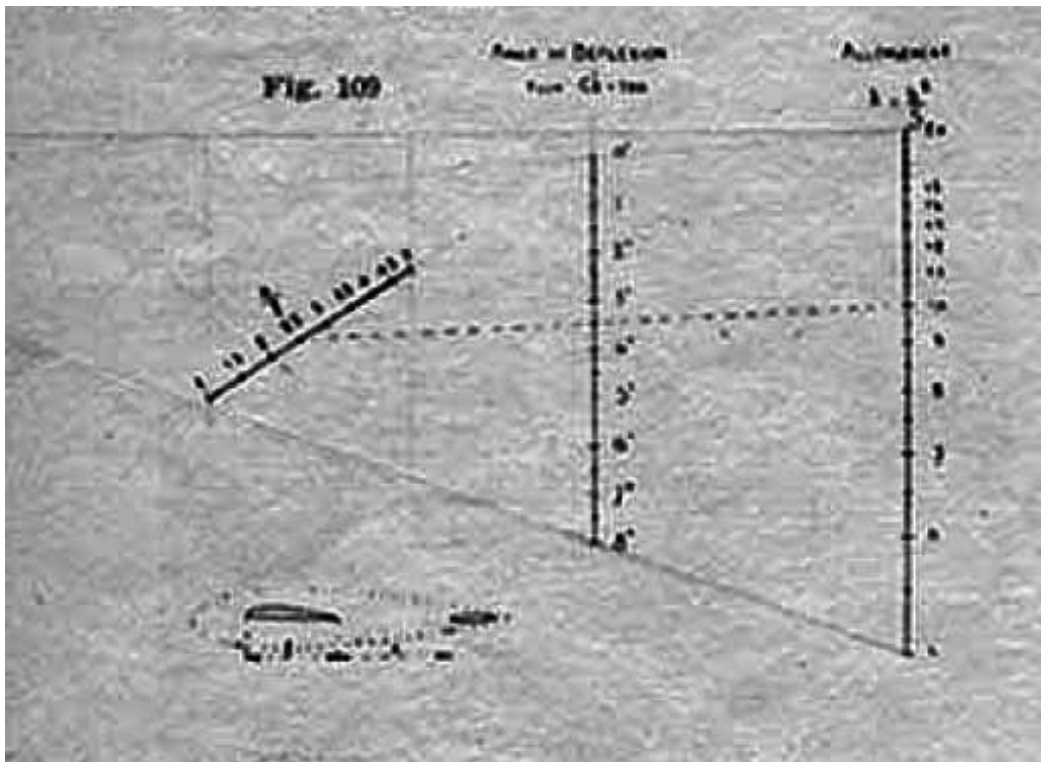
« Au bord de fuite, les filets d'ait, qui viennent de provoques la sustentation, en circulant autour du profil, sont défléchis vers le bas.

Leur direction par rapport à l'horizontale est donnée par différentes formules assez complexes. Nous donnons fig. 109 page 34, un abaque qui permet de trouver facilement une valeur approchée de l'angle de déflexion.

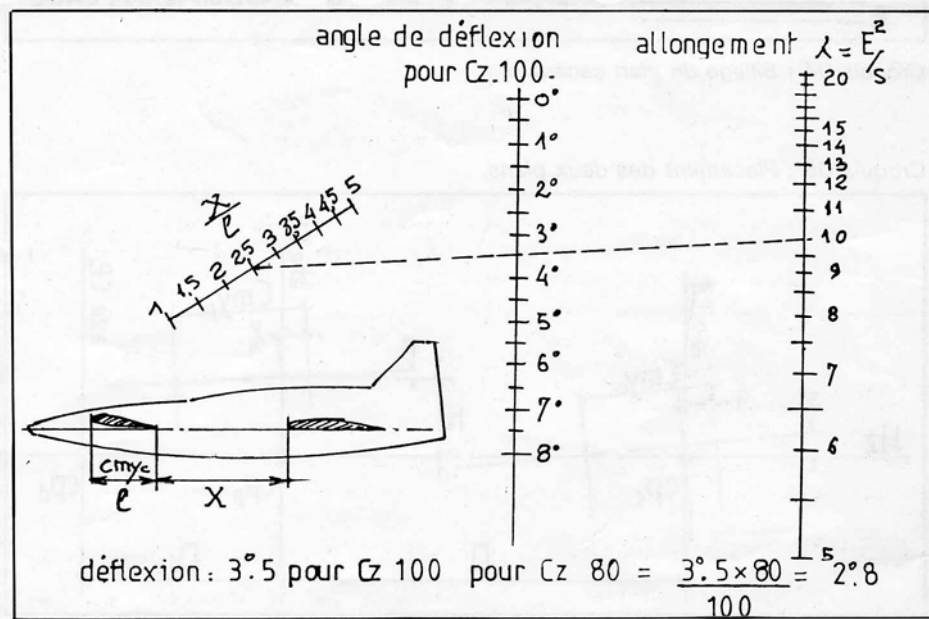
Il suffit de connaître

λ l'allongement de l'aile

x/l quotient de la distance x qui sépare l'empennage du bord de fuite de l'aile par la corde de l'aile.»



L'abaque dans le document original est minuscule et n'est malheureusement pas lisible.



L'abaque de Chabonats reproduite par P. Harivel [MRA n° 587, octobre 1988]

Exemple :

Aile d'allongement 10

Stab placé à 2,5 cordes d'aile en arrière.

L'angle de déflexion s'obtient en joignant la pointe 2,5 de l'échelle des x/l [échelle à gauche, en biais, sur la figure] au point 10 de l'échelle des λ [échelle verticale à droite sur la figure].

Cette droite coupe l'échelle des angles de déflexion [échelle verticale au milieu] au point 3° 5 qui est l'angle de déflexion pour $C_z = 1$.

Si l'aile travaille à un C_z de 0,8, la valeur de la déflexion sera $3.5 \times 80 / 100 = 2.8$.

COMPARAISON DE CES FORMULES

Pour toutes les formules l'angle de déflexion e est proportionnel au coefficient de portance C_{ZAV} de l'aile

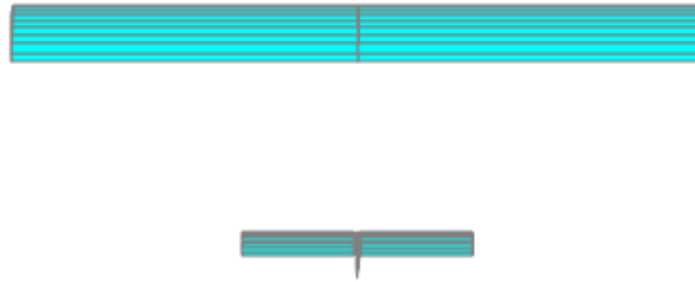
$$e = C_1 \cdot C_{ZAV}$$

où C_1 ne dépend que de la géométrie de l'aéronef.

Formule	C_1 (déflexion en degrés)	Remarques
Schmitz	$\frac{9,12}{\lambda_{AV}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{E_{AV}}{2.D} \right)^2} \right]$	Ne prend pas en compte la « hauteur » du stab par rapport à l'aile (entreplan vertical), uniquement sa distance (entreplan horizontal, ici par la distance D entre les foyers des deux plans)
Toussaint	$\frac{1}{\lambda_{AV}} \left[43 - 3,25 \cdot \frac{OH}{C_{AV}} - 0,45 \cdot \frac{AH}{C_{AV}} \right]$	Prend en compte explicitement les entreplans horizontal OH et vertical AH.
Prandl	$\frac{32,47}{\lambda_{AV}}$	Ne prend pas en compte la position du stab par rapport à l'aile.

Application numérique comparative

Planeur de configuration classique, de géométrie simple (aile et stab rectangulaires), sans fuselage



L'avant du modèle est en haut [Dessin PredimRC]

- Aile Envergure 2400 mm
- Corde 200 mm
- Surface 48 dm²
- Allongement = $E^2/S = 24^2/48 = 12$
- Stab Envergure 770 mm
- Corde 85 mm
- Surface 6,545 dm²
- Allongement = $E^2/S = 7,7^2/6,545 = 9$

Entreplan horizontal : 580 mm

Entreplan vertical : 0 mm (aile et stab dans le même plan horizontal)

Distance entre les foyers $D = 3 \times 200 / 4 + 580 + 85 / 4 = 150 + 580 + 21,25 = 751,25$ mm

Calculons la déflexion pour les 3 formules en prenant $C_{ZAV} = 1$ pour simplifier les calculs

Formule	C_1 (pour déflexion en degrés)	Déflexion (en degrés) Pour $C_{ZAV} = 1$	Remarques
Schmitz	$\frac{9,12}{\lambda_{AV}} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{E_{AV}}{2.D} \right)^2} \right]$	2,20 °	Ne prend pas en compte la « hauteur » du stab par rapport à l'aile (entreplan vertical), uniquement sa distance (entreplan horizontal, ici par la distance D entre les foyers des deux plans)
Toussaint	$\frac{1}{\lambda_{AV}} \left[43 - 3,25 \cdot \frac{OH}{C_{AV}} - 0,45 \cdot \frac{AH}{C_{AV}} \right]$	2,80 °	Prend en compte explicitement les entreplans horizontaux et verticaux
Prandl	$\frac{32,47}{\lambda_{AV}}$	2,70 °	Ne prend pas en compte la position du stab par rapport à l'aile.

POSITION DU FOYER GLOBAL EN TENANT COMPTE DE LA DEFLEXION

Le principe de calcul est le même que dans le paragraphe précédent, à la différence que, en raison de la déflexion, le plan arrière n'a pas la même incidence que le plan avant.

Nous avons écrit que la variation du moment total des actions aérodynamiques par rapport au foyer global est nulle lorsque l'incidence varie, ce qui nous a conduits à la relation (2)

$$F_{AV} F \cdot S_{AV} \cdot dC_{ZAV} = F F_{AR} \cdot S_{AR} \cdot dC_{ZAR} \quad (2)$$

Exprimons les variations de coefficients de portance pour une variation $d\alpha$ de l'incidence.

Le coefficient de portance s'écrit pour un plan d'allongement λ :

$$C_Z(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda}{\lambda + a} \cdot (\alpha - \alpha_0)$$

Pour le plan avant la variation de coefficient de portance ne change pas :

$$dC_{ZAV} = A_\infty \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot d\alpha$$

Par contre le plan arrière (stabilisateur horizontal) est dans le flux d'air défléchi par l'aile avant.

La déflexion étant e , son incidence « vraie » est $\alpha_{stab} = \alpha - e$

D'où

$$C_{ZAR}(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (\alpha - e - \alpha_0)$$

La variation du coefficient de portance du stab correspondant à une variation $d\alpha$ d'incidence sera :

$$dC_{ZAR} = A_\infty \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (d\alpha - de)$$

Il faut exprimer la variation de l'angle de déflexion pour la variation d'incidence $d\alpha$.

L'angle de déflexion étant proportionnel au coefficient de portance du plan avant on écrit pour alléger l'écriture

$$e = C_1 \cdot C_{ZAV}$$

Les expressions de C_1 , dépendant de la « formule » de calcul de la déflexion choisie sont données dans le tableau précédent.

D'où

$$de = C_1 \cdot dC_{ZAV} = C_1 \cdot A_\infty \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot d\alpha$$

$$dC_{ZAR} = A_\infty \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (d\alpha - de) = A_\infty \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot \left(1 - C_1 \cdot A_\infty \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \right) \cdot d\alpha$$

Posons $\varepsilon = C_1 \cdot A_\infty \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a}$

$$dC_{ZAR} = A_\infty \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (1 - \varepsilon) \cdot d\alpha$$

$$F_{AV} F \cdot S_{AV} \cdot dC_{ZAV} = F F_{AR} \cdot S_{AR} \cdot dC_{ZAR} \quad (2)$$

Donne

$$F_{AV} F \cdot S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} = F F_{AR} \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (1 - \varepsilon)$$

Il sera plus commode d'exprimer la position du foyer F par rapport au foyer du plan avant F_{AV} :

$$D = F_{AV} F_{AR} = F_{AV} F + F F_{AR} \quad \text{ou} \quad F F_{AR} = D - F_{AV} F$$

$$F_{AV} F = D \cdot \frac{S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (1 - \varepsilon)}{S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (1 - \varepsilon)}$$

$$F_{AV}F = D \cdot \frac{S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (1 - \varepsilon)}{S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (1 - \varepsilon)}$$

$$F_{AV}F = \frac{D}{1 + \frac{1}{(1 - \varepsilon)} \cdot \frac{S_{AV}}{S_{AR}} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AR}} \cdot \frac{\lambda_{AR} + a}{\lambda_{AV} + a}} \quad (6)$$

Conclusion

Si l'on tient compte de la déflexion, le foyer global est plus en avant.

En effet, l'incidence du stab étant diminuée, son coefficient de portance est plus petit et son influence sur la position du foyer est moindre.

APPLICATION NUMERIQUE COMPARATIVE

Reprenons l'exemple de planeur « classique »

- Aile Envergure 2400 mm
- Corde 200 mm
- Surface 48 dm²
- Allongement = E²/S = 24²/48 = 12
- Stab Envergure 770 mm
- Corde 85 mm
- Surface 6,545 dm²
- Allongement = E²/S = 7,7²/6,545 = 9

Entreplan horizontal : 580 mm

Entreplan vertical : 0 mm (aile et stab dans le même plan horizontal)

Distance entre les foyers D = 3 x 200 / 4 + 580 + 85 / 4 = 150 + 580 + 21,25 = **751,25 mm**

$\varepsilon = C_1 \cdot A_\infty \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a}$ avec $A_\infty = 0,113$ (angles en degrés) et $a = 2$

$\lambda_{AV} = 12$ et $\lambda_{AR} = 9$

Formule	C ₁	ε	F _{AV} F	Remarques
Schmitz	2,20	0,213	69,8 mm	
Toussaint	2,80	0,270	65,2 mm	
Prandl	2,70	0,261	65,9 mm	

* Ecart relatif des foyers calculés

$100 \times 4 / 66 = \mathbf{6 \%}$

On peut en conclure que les 3 formules donnent des résultats concordants, compte tenu des approximations et des hypothèses faites pour les calculs.

* Foyer en tenant compte des allongements et de la déflexion

F_{AV}F = 66 à 70 mm selon la formule de calcul choisie

* Foyer sans tenir compte de la déflexion (Soit ε = 0) mais en tenant compte des allongements

F_{AV}F = 86,5 mm

Ecart avec le calcul tenant compte de la déflexion

On prend la valeur moyenne avec déflexion soit 68 mm

$100 \times (86,5 - 68) / 75 = \mathbf{25 \%}$

La déflexion influence sensiblement la position du foyer global puisqu'on a de déplacement relatif de 25 %

* Foyer sans tenir compte de la déflexion (Soit $\varepsilon = 0$) ni des allongements (allongements infinis)

$$F_{AVF} = 90,14 \text{ mm}$$

Ecart relatif avec le foyer obtenu en tenant compte uniquement des allongements

$$100 \times (90,1 - 86,5) / 90 = 4 \%$$

COMPARAISONS AVEC PredimRC

Toujours avec les valeurs de notre planeur test.

On met les dimensions du fuselage à zéro pour ne pas le prendre en compte.

Résultat : **Foyer à 62,5 mm en arrière du foyer de l'aile.**

Ecart de moins de 5 % avec notre calcul (tenant compte des allongements et de la déflexion)

FOYER D'UN AERONEF COMPLET

Remarque : Foyer au singulier car on ne s'intéressera qu'au foyer relatif à l'axe de tangage.

On tente de tenir compte du fuselage. Rien de précis dans ce domaine !!

Le fuselage subit des actions aérodynamiques au même titre que toutes les autres parties de l'aéronef.

Qualitativement, l'expérience (études en soufflerie, résultats d'essais en vol dans le cas de modèles réduits) montre que **la position du foyer global d'un appareil réel est plus avancée** que celle calculée sans tenir compte du fuselage.

FOYER, COEFFICIENT DE PORTANCE

On peut imaginer de modéliser ces actions comme on le fait pour une aile par un coefficient de portance et la définition d'un foyer et postuler que la portance du fuselage s'écrit :

$$P_{FUS} = \frac{1}{2} \rho \cdot C_{ZFUS} \cdot S_{FUS} \cdot V^2$$

Malheureusement un fuselage ne peut pas être assimilé à un profil mince et aucun des résultats établis précédemment ne peut lui être appliqué. Il faudra, à défaut de possibilités d'études en soufflerie, se contenter d'estimations plus ou moins réalistes.

* Surface S_{FUS}

Ce sera la surface du fuselage projetée sur un plan horizontal.

Pas de problème pour la mesurer pour un modèle réduit que l'on a dans les mains, ou avec un logiciel de DAO si on dispose d'une version numérique de son plan.

* Position du foyer F_{FUS}

La position du foyer du fuselage peut être exprimée en valeur relative de la longueur du fuselage L_{FUS} par rapport au nez N du fuselage :

$$NF_{FUS} = X_{FUS} \times L_{FUS}$$

- « Platon »

[Platon, *Le centrage c'est très simple*]

Thierry Platon propose sans autre justification la valeur $X_{FUS} = 0,2$

- « Aguerre »

[RC Aero Design]

Franck Aguerre tente de tenir compte de la forme projetée du fuselage en faisant intervenir la forme de la poutre de queue et il propose les valeurs suivantes de X_{FUS} :

Pour un appareil classique

Poutre fine 0,15

Poutre normale 0,20

Poutre large 0,25

Pour un canard, on peut considérer que la forme du fuselage est inversée

Poutre fine 0,45

Poutre normale 0,35

Poutre large 0,25

* **Coefficient de portance C_{ZFUS}**

Là aussi il faut nous contenter d'estimations très empiriques.

Par analogie avec une aile le coefficient de portance sera écrit

$$C_{ZFUS} = A_{\infty} \cdot A_{FUS} \cdot (\alpha - \alpha_{0FUZ})$$

$A_{\infty} = 0,113$ (angles en degrés) : gradient de portance pour une aile d'allongement infini.

A_{FUS} étant un coefficient de « correction » le fuselage n'étant pas une aile.

- « Platon »

[Platon, *Le centrage c'est très simple*]

Thierry Platon propose sans autre justification la valeur $A_{FUS} = 0,7$ à $0,8$

- « Aguerre »

[RC Aero Design]

De son côté, Franck Aguerre cherche à affiner l'estimation et propose des valeurs de A_{FUS} allant de $0,4$ à 1 .

Il se hasarde à proposer la relation empirique

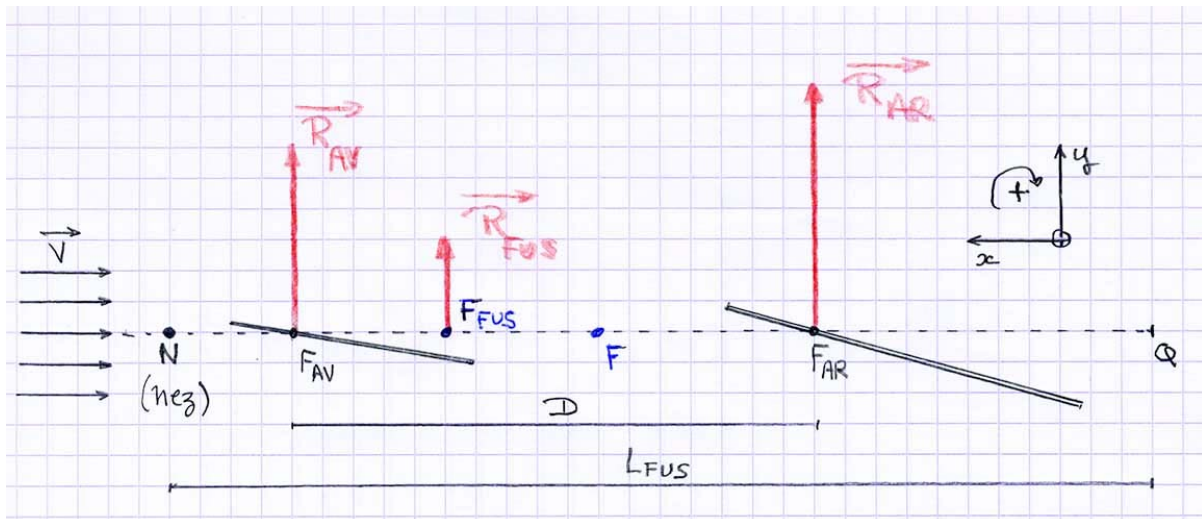
$$A_{FUS} = 0,2 \cdot (1 + \text{CAM du plan avant/largeur fuselage})$$

Et pour une aile volante avec fuselage, il préconise de choisir $A_{FUS} = 0,4$.

Conclusion

Sans analyse et réglages du modèle en vol la prise en compte du fuselage reste très approximative !

POSITION DU FOYER GLOBAL (AVEC FUSELAGE)



N est le nez du fuselage.

$QN = L_{FUS}$ est la longueur hors-tout du fuselage

Reprenons le calcul dans le cas de 2 plan et ajoutons le fuselage

* La variation de moment autour du foyer global du planeur sera :

* Variation du moment total pour une variation de l'angle d'incidence :

$$dMt/F = dR_{AV} \cdot FF_{AV} + dR_{FUS} \cdot FF_{FUS} + dR_{AR} \cdot FF_{AR}$$

(en effet les couples de tangage étant indépendants de l'angle d'incidence, leur variation est nulle)

Et la variation du moment total par rapport au foyer global étant nulle :

$$dR_{AV} \cdot FF_{AV} + dR_{FUS} \cdot FF_{FUS} + dR_{AR} \cdot FF_{AR} = 0$$

Soit

$$S_{AV} \cdot dC_{Z_{AV}} \cdot FF_{AV} + S_{FUS} \cdot dC_{Z_{FUS}} \cdot FF_{FUS} + S_{AR} \cdot dC_{Z_{AR}} \cdot FF_{AR} = 0$$

En tenant compte des allongements des plans avant et arrière

$CZ_{AV}(\alpha) = A_{\infty} \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot (\alpha - \alpha_0)$	$dCZ_{AV}(\alpha) = A_{\infty} \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot d\alpha$
$CZ_{FUS} = A_{\infty} \cdot A_{FUS} \cdot (\alpha - \alpha_{0FUS})$	$dCZ_{FUS}(\alpha) = A_{\infty} \cdot A_{FUS} \cdot d\alpha$
$CZ_{AR}(\alpha) = A_{\infty} \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (\alpha - \alpha_0)$	$dCZ_{AR}(\alpha) = A_{\infty} \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot d\alpha$

$$S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot FF_{AV} + A_{FUS} \cdot FF_{FUS} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot FF_{AR} = 0$$

Il sera plus commode d'exprimer la position du foyer F par rapport au foyer du plan avant F_{AV} :

Rappel : les relations sont algébriques.

$$D = F_{AR}F_{AV} = F_{AR}F + FF_{AV} \text{ ou } FF_{AR} = FF_{AV} - D$$

$$FF_{FUS} = FF_{AV} + F_{AV}F_{FUS}$$

$$S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot FF_{AV} + A_{FUS} \cdot (FF_{AV} + F_{AV}F_{FUS}) + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (FF_{AV} - D) = 0$$

$$FF_{AV} \cdot \left[S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + A_{FUS} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \right] + A_{FUS} \cdot F_{AV}F_{FUS} - D \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} = 0$$

$$FF_{AV} = \frac{D \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} - A_{FUS} \cdot F_{AV}F_{FUS}}{S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + A_{FUS} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}} \quad (7)$$

Avec

$$F_{FUS}N = X_{FUS} \cdot QN = X_{FUS} \cdot L_{FUS}$$

Et

$$F_{FUS}F_{AV} = F_{FUS}N + NF_{AV} = X_{FUS} \cdot L_{FUS} + NF_{AV}$$

La distance entre nez du modèle et foyer du plan avant NF_{AV} est une donnée « géométrique » connue. Avec la convention de signe choisie sur la figure, elle sera négative. Alors que D et L_{FUS} telles que définies seront positives.

$$FF_{AV} = \frac{D \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} - A_{FUS} \cdot (X_{FUS} \cdot L_{FUS} + NF_{AV})}{S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + A_{FUS} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}} \quad (8)$$

Rappel : les longueurs sont algébriques.

Rappel des hypothèses

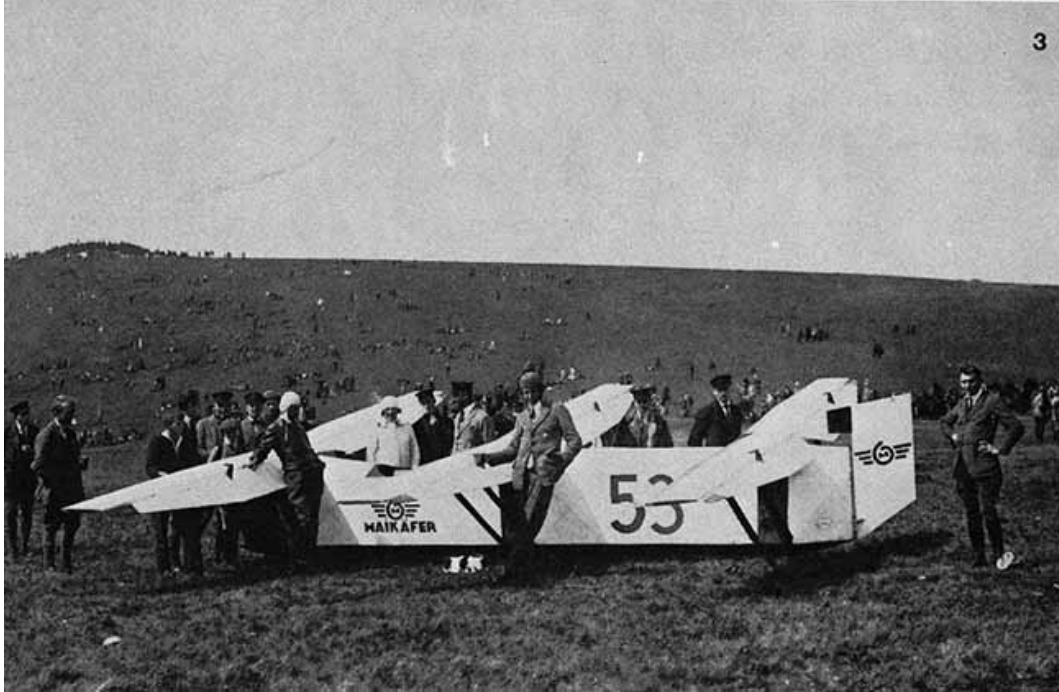
- Allongement des plans pris en compte
- Déflexion **non** prise en compte
- Influence du fuselage prise en compte très empiriquement

FOYER D'UN AERONEF A TROIS PLANS

EXEMPLES

Hentzen Maikäfer

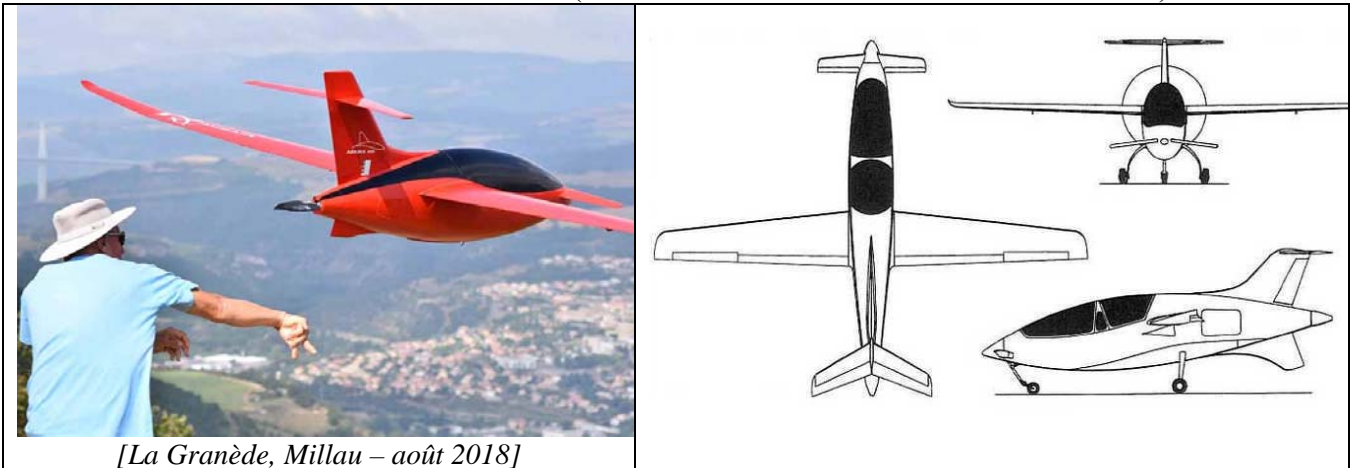
Inspiré par le succès du Tandem Alérion Peyret avec lequel Alexis Maneyrol avait battu le record du monde de durée à Itford Hill en 1922, un dénommé Maykemper de Francfort/Main construit en 1923 un triplan tandem qu'il appelle « Maikäfer » [*hanneton*] et qu'il présente au 4^e concours de la Rhön. Mais du fait d'une trop faible incidence des trois plans, la machine ne put décoller.



Le Maikäfer de Maykemper – Rhön 1923[Riedel, Start in den Wind]

Aericks 400

Ici l'un des 3 modèles réduits des « Palmitos » (selon la formule consacrée : ils se reconnaîtront !)

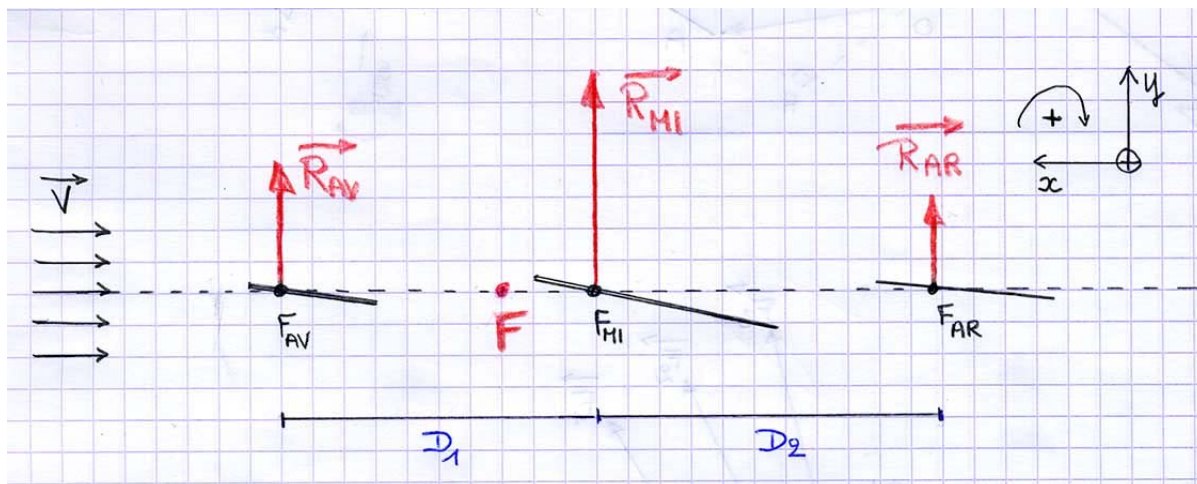


[La Granède, Millau – août 2018]

HYPOTHESES

Le calcul approché du foyer d'un tel appareil est fait sans tenir compte

- des déflexions
- du fuselage



CALCUL

Rappel : les relations écrites sont algébriques

Plan avant	Plan milieu	Plan arrière
Surface S_{AV}	Surface S_{MI}	Surface S_{AR}
Allongement λ_{AV}	Allongement λ_{MI}	Allongement λ_{AR}

Distances entre foyers $D_1 = F_{AV}F_{MI}$ et $D_2 = F_{MI}F_{AR}$

Toujours la même méthode de calcul : nous écrivons que la variation du moment de toutes les actions aérodynamiques par rapport au foyer global de l'aéronef, pour une variation de l'angle d'incidence $d\alpha$, est nulle.

Moment « total » par rapport au foyer global :

$$Mt_F = R_{AV} \cdot FF_{AV} + Mo_{AV} + R_{MI} \cdot FF_{MI} + Mo_{MI} + R_{AR} \cdot FF_{AR} + Mo_{AR}$$

Variation du moment total pour une variation de l'angle d'incidence :

$$dMt_F = dR_{AV} \cdot FF_{AV} + dR_{MI} \cdot FF_{MI} + dR_{AR} \cdot FF_{AR}$$

(En effet les couples de tangage étant indépendants de l'angle d'incidence, leur variation est nulle)

Et la variation du moment total par rapport au foyer global étant nulle :

$$dR_{AV} \cdot FF_{AV} + dR_{MI} \cdot FF_{MI} + dR_{AR} \cdot FF_{AR} = 0$$

Soit

$$S_{AV} \cdot dCz_{AV} \cdot FF_{AV} + S_{MI} \cdot dCz_{MI} \cdot FF_{MI} + S_{AR} \cdot dCz_{AR} \cdot FF_{AR} = 0$$

$Cz_{AV}(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot (\alpha - \alpha_0)$	$dCz_{AV}(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot d\alpha$
$Cz_{MI}(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda_{MI}}{\lambda_{MI} + a} \cdot (\alpha - \alpha_0)$	$dCz_{MI}(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda_{MI}}{\lambda_{MI} + a} \cdot d\alpha$
$Cz_{AR}(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (\alpha - \alpha_0)$	$dCz_{AR}(\alpha) = A_\infty \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot d\alpha$

$$S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot FF_{AV} + S_{MI} \cdot \frac{\lambda_{MI}}{\lambda_{MI} + a} \cdot FF_{MI} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot FF_{AR} = 0$$

Exprimons la position du foyer global par rapport au foyer du plan milieu F_{MI} .

$$D_1 = F_{MI} F + FF_{AV} \quad \text{soit} \quad FF_{AV} = D_1 - F_{MI} F = D_1 + FF_{MI}$$

$$D_2 = F_{AR} F + FF_{MI} \quad \text{soit} \quad F_{AR} F = D_2 - FF_{MI}$$

$$S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} \cdot (D_1 + FF_{MI}) + S_{MI} \cdot \frac{\lambda_{MI}}{\lambda_{MI} + a} \cdot FF_{MI} - S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \cdot (D_2 - FF_{MI}) = 0$$

D'où

$$FF_{MI} \cdot \left[S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + S_{MI} \cdot \frac{\lambda_{MI}}{\lambda_{MI} + a} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} \right] = D_2 \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} - D_1 \cdot S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a}$$

$$FF_{MI} = \frac{D_2 \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a} - D_1 \cdot S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a}}{S_{AV} \cdot \frac{\lambda_{AV}}{\lambda_{AV} + a} + S_{MI} \cdot \frac{\lambda_{MI}}{\lambda_{MI} + a} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}} \quad (9)$$

Remarque

1) Si on supprime l'un des plans (en annulant simplement sa surface) on retrouve la relation (4) relative à un aéronef à deux plans.

Par exemple si $S_{AV} = 0$

$$FF_{MI} = \frac{D_2 \cdot S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}}{S_{MI} \cdot \frac{\lambda_{MI}}{\lambda_{MI} + a} + S_{AR} \cdot \frac{\lambda_{AR}}{\lambda_{AR} + a}}$$

2) Si les plans avant et arrière sont identiques et situés à la même distance du foyer du plan milieu, le foyer global coïncide avec le foyer du plan milieu : $FF_{MI} = 0$.

[Meneguz]

Détermination du centre de gravité d'un aéronef à 3 surfaces portantes.

Luc Meneguz, novembre 2019

Luc a développé une feuille de calcul pour déterminer la position du centre de gravité de l'Aericks, en raisonnant directement sur les moments par rapport au centre de gravité (dont la somme est nulle à l'équilibre).

Avec les hypothèses suivantes :

- profil de l'aile dissymétrique
- profils du plan canard et du stabilisateur symétriques
- Déflexion non prise en compte
- Allongements des plans non pris en compte (à voir ?)

APPLICATION

A faire

Comparer les résultats donnés par la formule de Luc avec ceux donnés par (6) dans le cas de l'Aericks.

ANNEXE 1 – Moment d'une force par rapport à un point

Petit rappel mathématique indispensable pour calculer des moments de forces.

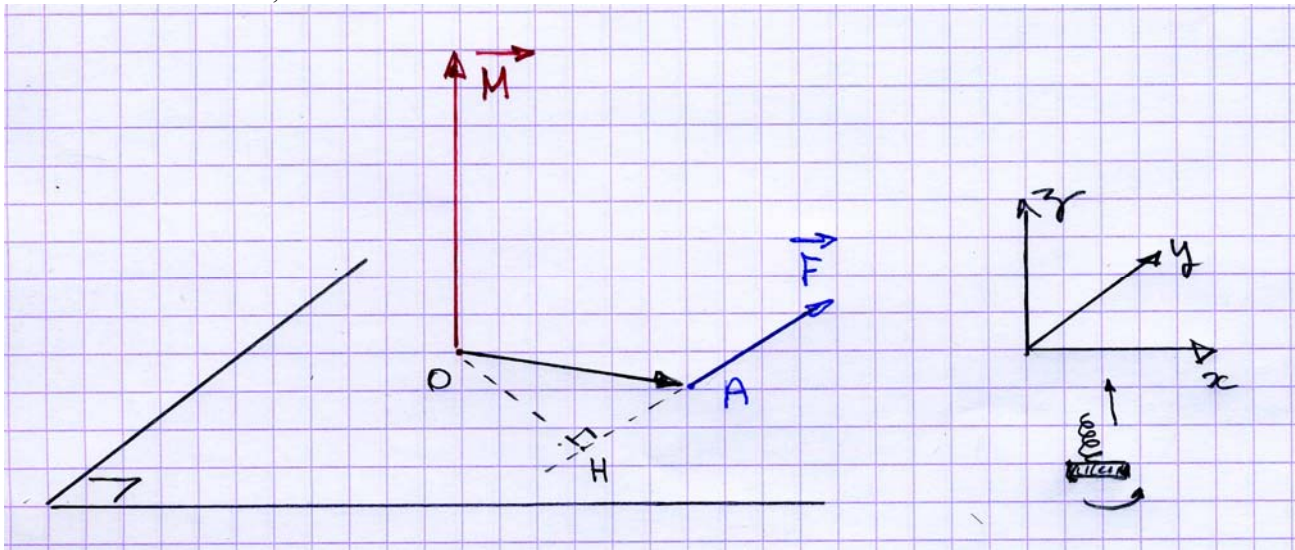
Définition

Le moment d'une force \mathbf{F} par rapport à un point O est défini par le produit vectoriel

$$\vec{M}(\mathbf{F})_{/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

C'est donc un vecteur

- orthogonal au plan défini par les vecteurs \mathbf{OA} et \mathbf{F}
- de norme $OH \times F$ (H étant la projection de O sur la direction de la force)
- de sens défini par la « règle du tire-bouchon » : si l'on fait tourner un tire-bouchon dans le sens de \mathbf{OA} vers \mathbf{F} , il va avancer dans le sens du moment \mathbf{M} .



A droite « règle du tire-bouchon » : si l'on tourne l'axe x vers l'axe y , le tire-bouchon avance dans le sens de l'axe z .

ANNEXE 2 – Corde aérodynamique moyenne

Il faut alors déterminer la Corde aérodynamique moyenne (CAM) de l'aile.

- Définition

La corde aérodynamique moyenne (CAM) est la corde d'une aile rectangulaire, qui aurait la même surface, qui subirait la même force et dont le centre de poussée serait à la même position que l'aile considérée (pour un angle d'incidence donné).

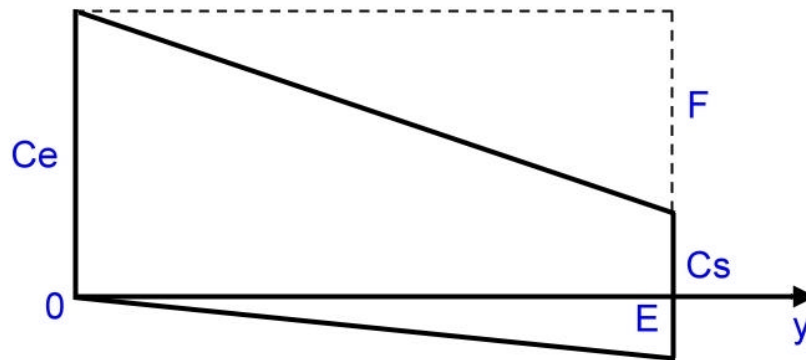
Cette notion est d'un grand intérêt car elle permet de remplacer l'aile réelle par une aile rectangulaire dans tous les calculs que l'on peut être amené à faire ultérieurement.

L'aile « équivalente » étant rectangulaire :

Le foyer sera un point fixe situé à 25 % de la CAM

3) Exemples 1 : aile trapézoïdale

[Voir les calculs dans [CORDE MOYENNE-v1.pdf](#)]



Ce : corde à l'emplanture
 Cs : corde au saumon
 E : envergure
 F : flèche

$$CAM = \frac{2.Cs}{3} \cdot \frac{(1 + Ef + Ef^2)}{(1 + Ef)} \quad (\text{calcul de l'intégrale de définition})$$

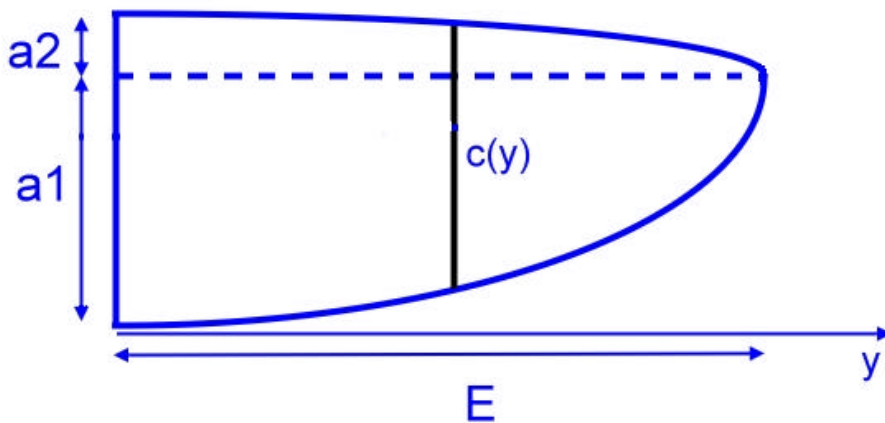
Ou bien avec les cordes

$$CAM = \frac{2}{3} \cdot \frac{(Ce^2 + Ce.Cs + Cs^2)}{(Ce + Cs)} \quad (\text{calcul rigoureux})$$

$$D_{CAM} = \frac{E}{3} \cdot \frac{(2 + Ef)}{(1 + Ef)} \quad \text{ou} \quad D_{CAM} = \frac{E}{3} \cdot \frac{(Ce + 2.Cs)}{(Ce + Cs)}$$

Remarque : Pour une aile formée de plusieurs tronçons trapézoïdaux, voir [CORDE MOYENNE-v1.pdf](#)

4) Exemple 2 : aile « elliptique »



Ce = a1 + a2, corde à l'emplanture.

$$CAM = \frac{8.Ce}{3.\pi} = 0,848.Ce$$

La CAM vaut 84,8 % de la corde à l'emplanture

Remarque : on obtient le même résultat que pour une aile en demi-ellipse.

$$D_{CAM} = E \sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2} = 0,529.E$$

La CAM est située à 52,9 % de l'envergure de l'aile

Remarque : on obtient le même résultat que pour une aile en demi-ellipse.

* On trouvera le développement des calculs dans cet article :



[CORDE MOYENNE-v1.pdf](#)

http://claudel.dopp.free.fr/Les_planeurs/Technique/CAM/CAM.htm

ANNEXE 3 – FORMULE EMPIRIQUES

Quelques formules empiriques permettant la détermination du foyer global d'un appareil, glanées dans la littérature.

Formule de Harivel

Voir ci-dessus « Foyer de deux plans – Détermination graphique »

Formule de Lapresle

<http://da01ulm.free.fr/stability/stability.htm>

La formule simplifiée de **Lapresle** permet de calculer la position du foyer pour un monoplan avec un moteur placé à l'avant.

$$\text{Foyer en \% de CA} = 0.225 + 0.37 * ((SS * BLAR) / (SA * CA))$$

position du foyer = 46.75 % de la corde d'aile

Je ne sais pas d'où vient cette formule ?

Formule de van PUTTE

a) Formule de Ronald Van PUTTE

[Le Canard par le Capitaine Ronald van PUTTE Radio Modélisme n° 26 février 1969]

[Rigoulot, Canardons, RCM n° 39, juillet 1984 p 49]

« Soit L (fig. 3) la distance séparant le centre de poussée de l'aile de celui de l'empennage (distance entre les 2 foyers).

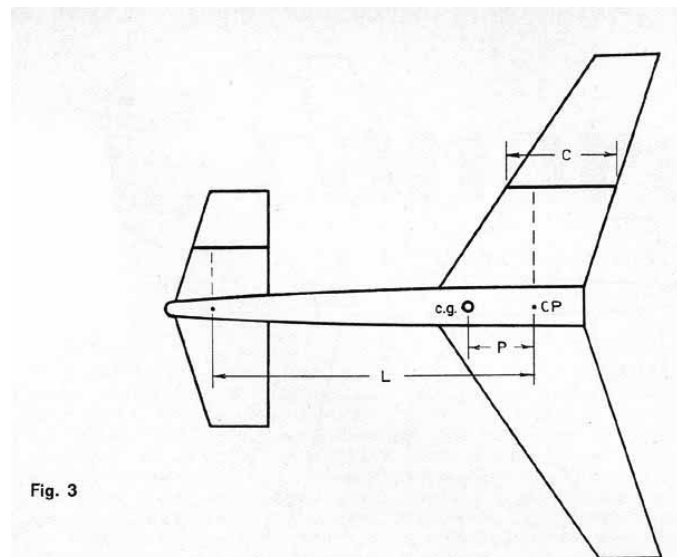


Fig. 3

Soient S la surface alaire et A la surface de l'empennage horizontal. Le centre de gravité doit se trouver à une distance P (en cm) en avant du centre de poussée de l'aile, comme le montre la figure 3. P est déterminé par l'équation (4) :

$$(4) \quad P = \frac{LA}{S} + \frac{C}{10}$$

L'utilisation de cette équation aboutit en fait à déplacer le centre de gravité en avant de la position optimale, pour la stabilité et la manoeuvrabilité, mais on est alors certain d'une bonne stabilité longitudinale. »

Remarque : d'après Rigoulot « cette formule souvent utilisée donne dans certains cas de figure (petits empennages) un centrage trop avant, sûr, mais ne permettant pas le vol lent. »

** Variante (dont j'ignore l'origine) :

C'est presque la même que la précédente au dénominateur près qui néglige la surface du plan canard devant la surface de l'aile.

Le centre de gravité est placé en avant du foyer, à une distance de 10% de la corde moyenne de l'aile arrière.

Ce qui se traduit par

$$L = \frac{F_1 F_2 \cdot S_{av}}{S_{ar} + S_{av}} + \frac{C_{my}}{10}$$

L : distance entre le foyer F_2 de l'aile et le centre de gravité.

C_{my} : corde moyenne de l'aile

Remarque 1 : on remarque qu'elle coïncide avec le centrage moyen préconisé par P. Harivel.

Mais Ron ne précise pas de plage de centrage :

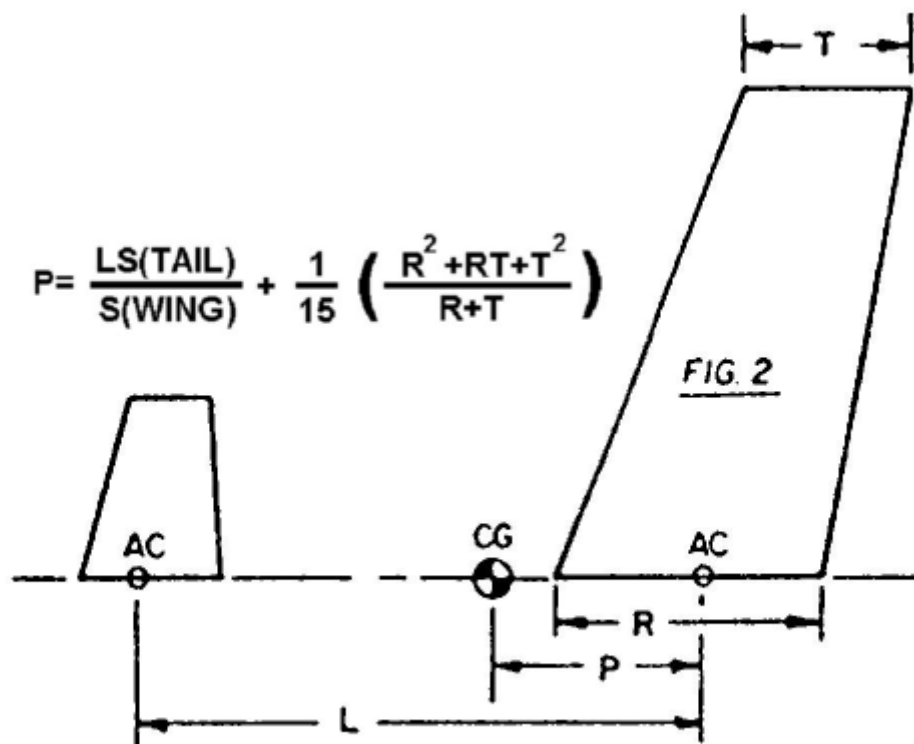
« Après les premiers vols, si tout va bien on peut reculer le centrage jusqu'à la position donnant la meilleure maniabilité.

Si sur le dessin, l'emplacement du centre de gravité déterminé par la formule précédente semble difficile à obtenir sur l'appareil terminé, à moins d'ajouter une quantité importante de lest, le mieux est de modifier le rapport des surfaces ou le bras de levier (ou l'emplacement du moteur), de sorte que le centrage calculé permette une construction facile. »

b) Ron Van PUTTE on Canards

[Model Aviation, juin 1980]

“Determine the distance between the aerodynamic centers of the wing and horizontal stabilizer and locate the proper center of mass as shown in Figure 2 by using the P equation.



This center of mass location guarantees that the aircraft will basically stable in pitch. After test flights have been made, it may be desirable to move the center of mass toward the rear of the airplane in order to improve the pitch response of the aircraft.”

Formule de Vincent

[Rigoulot, Canardons, RCM n° 39, juillet 1984 p 49]

(via Jac50 sur Rétroplane, d'après articles publiés dans RCM par B. RIGOULOT qui cite cette formule de Vincent)

- Position du foyer global

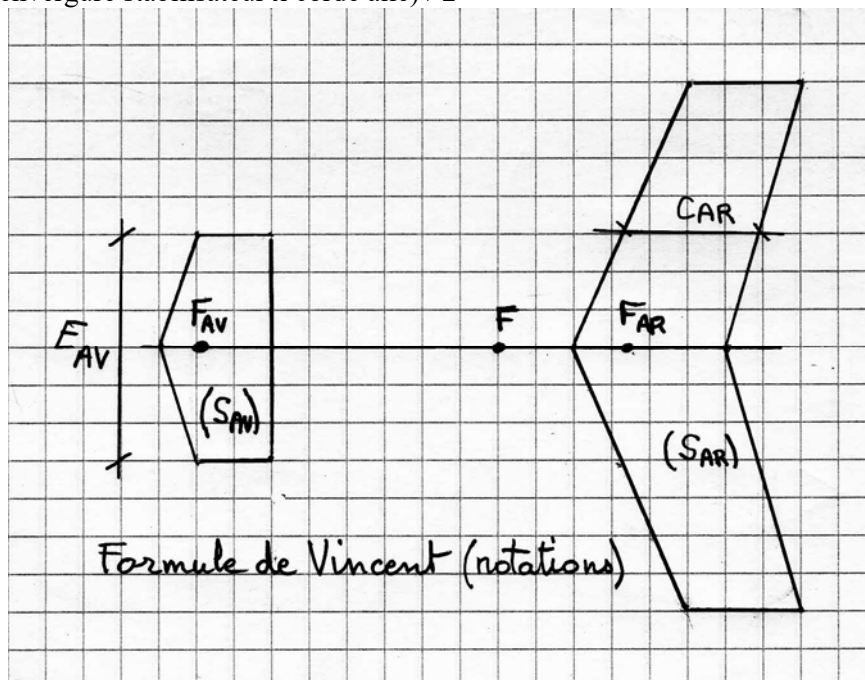
La formule de Vincent est une petite amélioration de la relation précédente, tentant de prendre en compte la déflexion de l'air par le stabilisateur.

Hypothèses simplificatrices

- 1) Le centre de poussée coïncide avec le foyer du plan porteur (aile ou stabilisateur)
- 2) Les profils des deux plans sont supposés identiques
- 3) L'influence du fuselage est totalement négligée

Une partie de l'aile se trouve dans le sillage du stabilisateur et son efficacité aérodynamique (sa contribution à la portance générée par l'aile) sera moindre. On peut considérer que tout se passe comme si la surface de l'aile était plus petite.

De manière empirique, on diminue la surface de la moitié de la surface d'aile se trouvant dans le sillage du stabilisateur soit (envergure stabilisateur x corde aile) / 2



- F_{AV} : foyer du plan canard (stabilisateur)
- F_{AR} : foyer de l'aile
- F : foyer global du planeur
- S_{AV} : surface du plan canard
- S_{AR} : surface de l'aile
- E_{AV} : envergure du plan canard
- C_{AR} : corde moyenne de l'aile

Formule de Vincent

$$F_{AR} = F_{AV} F_{AR} \cdot \frac{1}{S_{AR} - \frac{E_{AV} \cdot C_{AR}}{2} + \frac{S_{AV}}{2}}$$

SOURCES DOCUMENTAIRES

BIBLIOGRAPHIE

[Lapresle 1930]

Girouette aérodynamique et stabilité de forme des planeurs

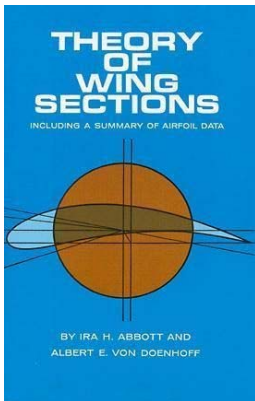
Antonin Lapresle, Bulletin technique n° 66, Services Techniques de l'Aéronautique (STAé) 1930

Fichier PDF :[1930_girouette_aerodynamique_et_stabilite_de_forme_des_planeurs_lapresle.pdf](#)**Examen critique de la méthode de la girouette pour le contrôle au laboratoire aérodynamique de la stabilité de forme des avions**

Antonin Lapresle, ATMA (Association Technique Maritime et Aéronautique) 1931

Bulletin du Service Technique de l'Aéronautique n° 66, février 1930

Traduction en anglais NACA Technical Memorandum n° 607

Fascicule en vente 6 €<https://www.atma.asso.fr/fr/page-16/produit-2851/examen-critique-de-la-methode-de-la-girouette-pour-le-contrôle-au-laboratoire-aerodynamique-de-la.html>**Theory of wing sections****Including a summary of airfoil data**

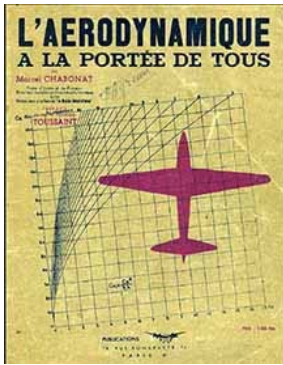
Ira H. Abbott & Albert E. von Doenhoff

Dover Publication, New York (2e edition 1959)

**Aérodynamique – 164 profils et leurs polaires**

Serge Barth

RCM hors série 2H, décembre 1998



L'aérodynamique à la portée de tous
Marcel Chabonat
Publication MRA, 1946



MRAérodynamique
Jean Champenois
Publication MRA ca. 1985



RC Aero design
Franck Aguerre
Movipro-KoolPress 2013

ARTICLES

[Rousselot]

Nouvelles réflexions sur la stabilité longitudinale des appareils de formule Mignet

Pierre Rousselot

Discussion détaillée sur la girouette...

<http://inter.action.free.fr/publications/stabilite/stabilite.html>

[Balligand]

Du centrage des Poux du Ciel...

Philippe Balligand

Les Infos du constructeur, RSA belge, juillet-août 1997 (extrait)

[Harivel MRA 587]

« Canard », quand tu nous hantes !

Pierre Harivel

Le MRA n° 587, octobre 1988

[Harivel MRA 588]

Etude d'un canard modèle réduit. Sans formule, par l'image

Pierre Harivel

Le MRA n° 588, novembre 1988

[Platon]

Le centrage c'est presque simple

Thierry Platon, 21/09/2006

Initialement publié sur le site Planet Soaring

[Meneguz]

Détermination du centre de gravité d'un aéronef à 3 surfaces portantes.

Luc Meneguz, novembre 2019

*

Mathématiques et mathématiciens dans les activités de l'IMFL liées à l'aéronautique (1929-1945)

Photo girouette de Lapresle

<http://revues.univ-tlse2.fr/pum/nacelles/index.php?id=978>